Correction: Polynésie 21 Juin 2019

Exercice 1:

1) La fonction f définie et dérivable sur $]0\ ;+\infty[$: $f(x) = -1{,}5\,x^2 + x^2 \times \ln x$

$$f'(x) = -3\,x + \left(2\,x \times \ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x}\right) = -3\,x + 2\,x\ln(x) + x$$

$$f'(x) = 2\,x\ln(x) - 2\,x$$

Réponse b

2) Le prix passe de 2 euros à 3,5 euros en 12 ans

On a: $2 \times \left(1 + \dfrac{x}{100}\right)^{12} = 3{,}5 \Leftrightarrow \left(1 + \dfrac{x}{100}\right)^{12} = \dfrac{3{,}5}{2} = 1{,}75$

$1{,}75^{\frac{1}{12}} = 1 + \dfrac{x}{100} \Leftrightarrow \dfrac{x}{100} \approx 0{,}0477$ d'où $x \approx 4{,}77$

Réponse b

3) Parties successives, indépendantes: deux issues possibles succés avec $p = \dfrac{1}{25}$ et échec avec $q = 1 - p = \dfrac{24}{25}$

La variable aléatoire $\mathbf{X}$ compte le nombre de parties gagnées

$\mathbf{X}$ suit une loi binomiale de paramètres $n = 13$ et $p = \dfrac{1}{25}$

Probabilité qu'il ait gagné au moins une partie

On considère l'événement contraire, il a perdu toutes les parties

$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0)$

A la calculatrice, on trouve: $P(X \geqslant 1) \approx 1 - 0{,}588$ donc $P(X \geqslant 1) \approx 0{,}412$

Réponse b

4) La fonction g admet une primitive sur $\mathbf{R}$, notée G d'où $G'(x) = g(x)$

Tableau de variations:

x	$-\infty$		-1		2		5		$+\infty$
$g(x) = G'(x)$		$-$	0	$+$	4	$+$	0	$-$	
$G(x)$		$\searrow$	$G(-1)$	$\nearrow$	$G(2)$	$\nearrow$	$G(5)$	$\searrow$	

La fonction G est croissante sur l'intervalle $[2\ ;5]$

Réponse c

Exercice 2:

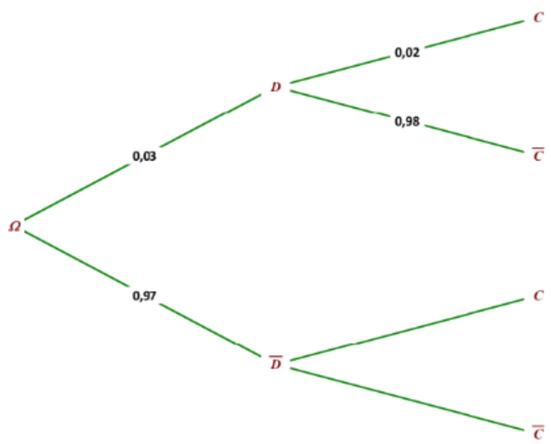
Partie A:

1)a) $3\ \%$ des téléviseurs ont un défaut sur la dalle: $P(D) = 0{,}03$ et parmi ceux-ci $2\ \%$ ont aussi un défaut sur le condensateur:

$P_D(C) = 0{,}02$

$5\ \%$ des téléviseurs ont un défaut sur le condensateur: $P(C) = 0{,}05$

1)b) Arbre pondéré:



1)c) $P(D \cap C) = P(D) \times P_D(C) = 0{,}03 \times 0{,}02 = 0{,}0006$

1)d) Calcul $P_C(D) = ?$

$$P_C(D) = \frac{P(D \cap C)}{P(C)} = \frac{0{,}0006}{0{,}05} = 0{,}012$$

La probabilité qu'il ait un défaut sur la dalle sachant qu'il a un défaut sur le condensateur est égale à $0{,}012$

1)e) Probabilités totales:

$$P(C) = P(D \cap C) + P\left(\overline{D} \cap C\right) \Leftrightarrow P\left(\overline{D} \cap C\right) = P(C) - P(D \cap C) = 0{,}0494$$

La probabilité que le téléviseur ait un défaut sur le condensateur mais pas sur la dalle est égale à $0{,}0494$

2)a) La variable aléatoire $\mathbf{T}$ associe, à chaque téléviseur, le temps exprimé en mois avant la première panne.

$\mathbf{T}$ suit une loi normale d'espérance $\mu = 84$ et d'écart type $\sigma = 6$

A la calculatrice, on a:

$P(T \geqslant 72) \approx 0{,}977$

2)b) $6\ ans = 72\ mois$ et $8\ ans = 96\ mois$

A la calculatrice, on a:
$P(72 \leqslant T \leqslant 96) \approx 0,954$

2))c) $P_{T \geqslant 72}(T \leqslant 96) = \dfrac{P\left((T \geqslant 72) \cap (T \leqslant 96)\right)}{P(T \geqslant 72)} = \dfrac{P(72 \leqslant T \leqslant 96)}{P(T \geqslant 72)} \approx \dfrac{0,954}{0,977}$

$P_{T \geqslant 72}(T \leqslant 96) \approx 0,976$

Le téléviseur n'a pas eu de panne après **6 ans** d'utilisation.

La probabilité qu'il tombe en panne avant **8** années d'utilisation est égale à **0,976**

Partie B:

On sait que $n = 300 \geqslant 30$; $n \times p = 300 \times 0,90 = 270 \geqslant 5$ et $n \times (1-p) = 300 \times 0,10 = 30 \geqslant 5$

Les condions sont vérifiées

Intervalle de fluctuation au seuil de **95 %** : $I = \left[p - 1,96 \times \sqrt{\dfrac{p \times (1-p)}{n}} \ ; p + 1,96 \sqrt{\dfrac{p \times (1-p)}{n}} \right]$

$I = \left[0,90 - 1,96 \times \sqrt{\dfrac{0,90 \times 0,10}{300}} \ ; 0,90 + 1,96 \times \sqrt{\dfrac{0,90 \times 0,10}{300}} \right]$

D'où $I \approx [0,866 \ ; 0,934]$

Calculons la fréquence observée: $f_{obs} = \dfrac{265}{300} = \dfrac{53}{60} \approx 0,883$

On constate que $f_{obs} \in I$, ce qui ne remet pas en cause l'affirmation de l'entreprise.

Exercice 3:

1) Une capsule coûte **0,60** euros donc **60** capsules coûtent $0,6 \times 60 = 36$ euros

Soit une rédution de **24** euros : le coefficient multiplicateur est égal à $\left(1 - \dfrac{x}{100}\right)$ d'où:

$\left(1 - \dfrac{x}{100}\right) \times 60 = 24 \Leftrightarrow \left(1 - \dfrac{x}{100}\right) = \dfrac{24}{60} = \dfrac{2}{5} \Leftrightarrow -\dfrac{x}{100} = \dfrac{2}{5} - 1 = \dfrac{-3}{5}$

Donc $x = \dfrac{3}{5} \times 100 = 60$

Le pourcentage de réduction correspond à **60 %**

2)a) Au 1^{er} janvier 2017, on comptait **60000** utilisateurs de cette machine à café, soit $u_0 = 60000$

Soit u_n le nombre d'utilisateurs de cette machine n mois après le 1^{er} janvier 2017, u_{n+1} le nombre le mois suivant

Chaque mois **10 %** des utilisateurs cessent de l'utiliser soit, $\left(1 - \dfrac{10}{100}\right) \times u_n = 0,9\ u_n$

mais on compte **24000** nouveaux utilisateurs chaque mois, soit $0,9\ u_n + 24000$

Donc $u_{n+1} = 0,9\ u_n + 24000$

2)b) $v_n = u_n - 240000$

$v_{n+1} = u_{n+1} - 240000 = (0,9\ u_n + 24000) - 240000 = 0,9\ u_n - 216000$

$v_{n+1} = 0,9\left(u_n - \dfrac{216000}{0,9}\right) = 0,9\,(u_n - 240000)$

$v_{n+1} = 0,9\ v_n$

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,9$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 240000 = -180000$

3)a) Expression de v_n en fonction de n: $v_n = v_0 \times (q)^n = -180000 \times (0,9)^n$

3)b) Expression de u_n en fonction de n: $v_n = u_n - 240000 \Leftrightarrow u_n = v_n + 240000$

Donc $u_n = 240000 - 180000 \times (0,9)^n$

4) On veut trouver n pour que: $u_n \geqslant 230000$

$u_n = 240000 - 180000 \times (0,9)^n \geqslant 230000 \Leftrightarrow -180000 \times (0,9)^n \geqslant -10000 \Leftrightarrow (0,9)^n \leqslant \dfrac{10000}{180000} = \dfrac{1}{18}$

$\Leftrightarrow \ln 0,9^n \leqslant \ln\left(\dfrac{1}{18}\right)$ car la fonction "ln" est croissante sur $]0 \ ; +\infty[$

$\Leftrightarrow n \ln(0,9) \leqslant \ln\left(\dfrac{1}{18}\right) \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{18}\right)}{\ln(0,9)}$ car $0,9 \leqslant 1 \Leftrightarrow \ln(0,9) \leqslant \ln 1 = 0$

$\dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{18}\right)}{\ln(0,9)} \approx 27,4$

Le nombre d'utilisateurs dépassera **230000** dans **28** mois, soit dans **2** ans et **4** mois

5) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(240000 - 180000 \times (0,9)^n\right) = ?$

$\lim\limits_{n \to +\infty} (0,9^n) = 0$ car $0 < q = 0,9 < 1$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u^n = 240000$

L'affirmation de l'entreprise est fausse car le nombre d'utilsateurs ne dépassera pas **240000**

Exercice 4:

Partie A:

1) La fonction f est définie sur $[1\ ;\ 9]$ par: $f(x) = 0{,}5\,x^2 - 7\,x + 14 + 6\ \ln(x)$

La fonction est dérivable : $f'(x) = x - 7 + 0 + 6 \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{x^2 - 7\,x + 6}{x}$

2)a) $x \in [1\ ;\ 9]$, $x > 0$

Le signe de $f'(x)$ dépend du signe du numérateur, soit $x^2 - 7\,x + 6$

$\Delta = b^2 - 4\,a\,c = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 49 - 24 = 25 = 5^2$

2 solutions: $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2\,a} = \dfrac{7-5}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2\,a} = \dfrac{7+5}{2} = 6$

x	$-\infty$		1		6		$+\infty$
$x^2 - 7\,x + 6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Tableau de variations:

x	1		6		9
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(1) > 5$	$\searrow$	$f(6) < 5$	$\nearrow$	$f(9) < 5$

avec $\begin{cases} f(1) = 7{,}5 \\ f(6) \approx 0{,}75 \\ f(9) \approx 4{,}68 \end{cases}$

2)b) La fonction f est continue et croissante sur $[6\ ;\ 9]$ comme $f(6) < 5$ et $f(9) < 5$

L'équation $f(x) = 5$ n'admet pas de solution sur cet intervalle

La fonction f est continue et décroissante sur $[1\ ;\ 6]$ comme $f(1) > 5$ et $f(6) < 5$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires:

l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution sur cet intervalle

Conclusion: l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1\ ;\ 9]$

2)c) A la calculatrice, on obtient l'encadrement suivant: $2{,}55 \leqslant \alpha \leqslant 2{,}56$

2)d) Algorithme: à la fin de son exécution la valeur de la variable $\mathbf{X}$ contient la valeur $2{,}56$

3) D'après le tableau de variations la fonction f atteint son minimum pour $x = 6$ et il vaut $f(6) \approx 0{,}75$

Attention aux unités:

Il faut donc fabriquer 600 pneus pour un coût moyen annuel minimal de fabrication d'un pneu s'élevant à 75 euros

Partie B:

1) La fonction g est définie sur $[0\ ;\ 100]$ par: $g(x) = 2\,x - 1 + e^{0,05\,x}$

Une primitive de g est G définie sur $[0\ ;\ 100]$ est:

$G(x) = 2\left(\dfrac{x^2}{2}\right) - 1\,(x) + \dfrac{1}{0{,}05} \times e^{0,05\,x} = x^2 - x + \dfrac{1}{0{,}05} \times e^{0,05\,x}$ (forme $u' \times e^u$ primitive e^u)

Donc $G(x) = x^2 - x + 20\ e^{0,05\,x}$

2) Valeur moyenne de la fonction g :

$m = \dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b g(x)\ d\,x = \dfrac{1}{100} \int_0^{100} g(x)\ d\,x = \dfrac{1}{100}\,[\,G(x)\,]_0^{100}$

$m = \dfrac{1}{100}\,[\,G(100) - G(0)\,]$ avec $\begin{cases} G(0) = 20 \\ G(100) = 100^2 - 100 + 20\ e^{0,05 \times 100} = 9900 + 20\ e^5 \end{cases}$

$m = \dfrac{1}{100}\,[\,9900 + 20\ e^5 - 20\,] = \dfrac{1}{100}\,[\,9880 + 20\ e^5\,]$ d'où $m \approx 128{,}48$

3) En moyenne le coût de fabrication d'un sémoir est égal à 12848 euros