Correction: Métropole 21 Juin 2019

Exercice 1:

1) D'après la formule des probabilités totales:

$$\mathbf{P(S)=P(R\cap S)+P\left(S\cap \overline{R}\right)=P(R)\times P_R(S)+P\left(\overline{R}\right)\times P_{\overline{R}}(S)=0{,}7\times 0{,}4+0{,}3\times 0{,}2=0{,}28+0{,}06}$$

$\mathbf{P(S)=0{,}34}$

$$\mathbf{P_S\left(\overline{R}\right)=\frac{P\left(\overline{R}\cap S\right)}{P(S)}=\frac{0{,}3\times 0{,}2}{0{,}34}\approx 0{,}177}$$

Affirmation 1: Fausse

2) La variable $\mathbf{X}$ suit une loi uniforme sur $[k\,;18]$; on suppose que: $\mathbf{E(X)=12}$

$$\mathbf{E(X)=\frac{18+k}{2}=12 \Leftrightarrow \frac{18+k}{2}=12 \Leftrightarrow 18+k=24 \Leftrightarrow k=24-18=6}$$

Affirmation 2: Fausse

3) $ln\left(a^n\right)=n\ln(a)$, $ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$ et $ln(a\times b)=\ln(a)+\ln(b)$

$$ln\left(x^2\right)-\ln\left(\frac{x^5}{e}\right)+\ln(2)=\ln(2x)+5 \Leftrightarrow 2\ln(x)-\ln\left(x^5\right)+\ln(e)+\ln(2)=\ln(2)+\ln(x)+5$$

$$\Leftrightarrow 2\ln(x)-5\ln(x)+1=\ln(x)+5 \Leftrightarrow -3\ln(x)-\ln(x)=5-1 \Leftrightarrow -4\ln(x)=4$$

$$\Leftrightarrow \ln(x)=\frac{4}{-4}=-1 \Leftrightarrow \ln(x)=\ln\left(e^{-1}\right) \Leftrightarrow x=e^{-1}=\frac{1}{e}$$ (car si $\ln(a)=\ln(b)$ équivaut à $a=b$)

Affirmation 3: Vraie

4) Soit f une fonction dérivable sur $[0\,;15]$

x	0		α		5		β		15
$f'(x)$	30	↘	0	↘	-5	↗	0	↗	20

La fonction f' est continue et décroissante $[0\,;5]$

$\mathbf{f(0)=30>0}$ et $f(5)=-5<0$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un unique $\alpha\in[0\,;5]$ tel que $\mathbf{f'(\alpha)=0}$

La fonction f' est continue et croissante $[5\,;15]$

$\mathbf{f(15)=20>0}$ et $f(5)=-5<0$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un unique $\beta\in[5\,;15]$ tel que $\mathbf{f'(\beta)=0}$

Donc sur $[0\,;15]$, l'équation $\mathbf{f'(x)=0}$ admet deux solutions

Conclusion: la courbe représentative de la fonction f admet deux tangentes horizontales

Affirmation 4: Fausse

5) Soit f une fonction dérivable sur $[0\,;15]$

x	0		5		15
$f'(x)$	30	↘	-5	↗	20

Sur l'intervalle $[5\,;15]$, la fonction f' est croissante ce qui signifie que $f''(x)\geqslant 0$

Alors f est convexe sur $[5\,;15]$

Affirmation 5: Vraie

Exercice 2:

1) En 2018, u_n représente le nombre de pommiers par hectare l'année $\mathbf{2018+n}$

u_{n+1} représente le nombre de pommiers par hectare l'année suivante

Laurence élimine chaque année $\mathbf{4\,\%}$, soit $\mathbf{0{,}96\times u_n}$ auxquels elle rajoute $\mathbf{22}$ nouveaux pommiers par hectare donc on a:

$\mathbf{u_{n+1}=0{,}96\,u_n+22}$

2) En 2020 soit $\mathbf{2018+2}$,on a $\mathbf{n=2}$

$\mathbf{u_0=300}$

$\mathbf{u_1=u_{0+1}=0{,}96\times u_0+22=310}$

$\mathbf{u_2=u_{1+1}=0{,}96\times u_1+22=319{,}6}$

En 2020, il y aura $\mathbf{320}$ pommiers par hectare

2)a) Algorithme:

Variables:	**N entier et U réel**
Initialisation:	**N prend la valeur 0**
	U prend la valeur 300
Traitement:	**Tant que $\mathbf{U\leqslant 400}$**
	U prend la valeur $\mathbf{0{,}96\times U+22}$
	N prend la valeur $\mathbf{N+1}$
	Fin Tant que
Sortie:	**Afficher N**

2)b) A la calculatrice, on obtient: $\mathbf{N=13}$

Donc le nombre de pommiers par hectare dépassera le nombre de 400 en $\mathbf{2031\left(\ =2018+13\right)}$

3)a) $\mathbf{v_n=u_n-550}$

$\mathbf{v_{n+1}=u_{n+1}-550=\left(0{,}96\times u_n+22\right)-550=0{,}96\times u_n-528}$

$v_{n+1}=0{,}96\times\left(u_n-\dfrac{528}{0{,}96}\right)=0{,}96\times\left(u_n-550\right)=0{,}96\times v_n$

Donc la suite $\left(v_n\right)$ est une suite géométrique de raison $q=0{,}96$ et $v_0=u_0-550=300-550=-250$

3)b) Expression de v_n en fonction de n: $v_n=v_0\times q^n=-250\times 0{,}96^n$

3)c) Expression de u_n en fonction de n: $v_n=u_n-550 \Leftrightarrow u_n=v_n+550$ donc $u_n=550-250\times 0{,}96^n$

3)c) En $2025=2018+7$ soit $n=7$ d'où $u_7=550-250\times 0{,}96^7\approx 362$

En 2025, il y aura **362** pommiers par hectare.

Donc sur l'exploitation de **14** hectares, il y aura $362\times 14=5068$ pommiers

3)d) $u_n=550-250\times 0{,}96^n\geqslant 400 \Leftrightarrow -250\times 0{,}96^n\geqslant 400-550 \Leftrightarrow -250\times 0{,}96^n\geqslant -150$

$250\times 0{,}96^n\leqslant 150 \Leftrightarrow 0{,}96^n\leqslant \dfrac{150}{250}=\dfrac{3}{5} \Leftrightarrow \ln\left(0{,}96^n\right)\leqslant \ln\left(\dfrac{3}{5}\right)$ (la fonction "ln" est croissante sur $\left]0\ ;+\infty\right[$)

$n\times \ln\left(0{,}96\right)\leqslant \ln\left(\dfrac{3}{5}\right) \Leftrightarrow n\geqslant \dfrac{\ln\left(\dfrac{3}{5}\right)}{\ln\left(0{,}96\right)}$ $\left(0{,}96<1 \Leftrightarrow \ln\left(0{,}96\right)<0\right)$ $\dfrac{\ln\left(\dfrac{3}{5}\right)}{\ln\left(0{,}96\right)}\approx 12{,}5$ donc $n=13$, on retrouve le résultat de la questio

Exercice 3:

Partie A:

1) La variable aléatoire **D** suit une loi normale de paramètres $\mu=15{,}5$ et $\sigma=6$

Il y a pénurie d'eau si le débit de la rivière est inférieur à $8\ m^3\ s^{-1}$

A la calculatrice, on trouve: $\mathrm{P}\left(\mathrm{D}\leqslant 8\right)\approx 0{,}11$

2) Pas de vigilance particulière, pas de risuqe de crue ni de pénurie

On doit calculer: $\mathrm{P}\left(8\leqslant \mathrm{D}\leqslant 26\right)\approx 0{,}85$

3) $\mathrm{P}\left(\mu-2\sigma\leqslant \mathrm{D}\leqslant \mu+2\sigma\right)=\mathrm{P}\left(15{,}5-2\times 6\leqslant \mathrm{D}\leqslant 15{,}5+2\times 6\right)=\mathrm{P}\left(15{,}5-12\leqslant \mathrm{D}\leqslant 15{,}5+12\right)=\mathrm{P}\left(3{,}5\leqslant \mathrm{D}\leqslant 27{,}5\right)\approx 0{,}95$

Partie B:

1) On effectue **10** tirages identiques et indépendants

A chaque tirage il y a deux issues possibles:

S : " relevé effectué par l'équipe de Sébastien" et $p=\dfrac{1}{4}=0{,}25$

$\bar{\mathrm{S}}$: " relevé effectué par la seconde équipe" et $q=1-p=\dfrac{3}{4}=0{,}75$

La variable aléatoire **X** compte le nombre de relevés effectués par l'équipe de Sébastien

X suit une loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=0{,}25$: $\mathrm{X}\sim\mathrm{B}\left(10\ ;0{,}25\right)$

2) A la calculatrice: $\mathrm{P}\left(\mathrm{X}=4\right)=\dbinom{10}{4}p^4\times(1-p)^{10-4}\approx 0{,}15$

3) On doit calculer $\mathrm{P}\left(\mathrm{X}\geqslant 2\right)=?$

$\mathrm{P}\left(\mathrm{X}\geqslant 2\right)=1-\mathrm{P}\left(\mathrm{X}\leqslant 1\right)$ avec $\mathrm{P}\left(\mathrm{X}\leqslant 1\right)\approx 0{,}24$

Donc $\mathrm{P}\left(\mathrm{X}\geqslant 2\right)\approx 0{,}76$

3) Intervalle de confiance : $\mathrm{I_C}=\left[f-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;f+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$

Amplitude de cet intervalle: $\left(f+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)-\left(f-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{n}}$

L'amplitude est inférieure à 0,1 donc $\dfrac{2}{\sqrt{n}}\leqslant 0{,}1 \Leftrightarrow \dfrac{2}{0{,}1}\leqslant\sqrt{n} \Leftrightarrow 20\leqslant\sqrt{n}$

D'où $400\leqslant n$ donc il faudra réaliser au minimum **400** relevés pour que l'amplitude de l'intervalle de confaince soit inférieure à 0,1.

Exercice 4:

Partie A:

1) Valeurs approchées: $\mathrm{f}(0)=112$ et $\mathrm{f}(60)=70$

2) $f''(7)=0$ car le point A est un point d'inflexion de la courbe (la courbe traverse la tangente en ce point)

3)a) Graphe:

3)b) L'aire du domaine comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=20$ contient plus de 20 carreaux

Chaque carreau a une aire de : $10\times 20=200\ u\cdot a$

L'aire du domaine est environ: $A\approx 200\times 20$ soit $4000\ u\cdot a$ d'où $A\geqslant 3800$

L'estimation est donc incorrecte.

Partie B:

1) La fonction f est dérivable sur $[0\ ;60]$, $f(x)=70+(14x+42)e^{-\frac{x}{5}}$

(forme $f(x)=u(x)\times v(x)$, dérivée $f'(x)=u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x)$)

$$f'(x)=14e^{-\frac{x}{5}}+(14x+42)\left(\frac{-1}{5}e^{-\frac{x}{5}}\right)=\left(14-\frac{1}{5}(14x+42)\right)e^{\frac{-x}{5}}=\frac{1}{5}\left(70-(14x+42)\right)e^{-\frac{x}{5}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{5}(28-14x)e^{-\frac{x}{5}}$$

2)a) Signe de $f'(x)$: $\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}>0$ sur $\mathbf{R}$

$f'(x)=\frac{1}{5}(28-14x)e^{-\frac{x}{5}}$, le signe de la dérivée dépend du signe de $(28-14x)$:

x	0 2 60
$28-14x$	+ 0 −

avec $28-14x=0 \Leftrightarrow x=2$

2)b) Tableau de variations:

x	0	2	60
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	$f(0)$ ↗	$f(2)$ ↘	$f(60)$

avec $\begin{cases} f(0)=112 \\ f(2)\approx 117 \\ f(60)\approx 70 \end{cases}$ arrondi à l'unité

3) $f'(x)=\frac{1}{5}(28-14x)e^{-\frac{x}{5}}$, la fonction f' est dérivable sur $[0\ ;60]$

Logiciel de calcul donne: $f''(x)=\frac{14}{25}e^{\frac{-x}{5}}\times(x-7)$

$\frac{14}{25}e^{\frac{-x}{5}}>0$, le signe de la dérivée seconde dépend du signe de $(x-7)$

x	0 7 60
$x-7$	− 0 +

avec $x-7=0 \Leftrightarrow x=7$

D'où le tableau suivant:

x	0	7	60
$f''(x)$	−	0	+
$f(x)$	*concave*	|	*convexe*

4)a) Montrons que: G est une primitive de g sur $[0\ ;60]$ est: $G(x)=(-70x-560)e^{\frac{-x}{5}}$

La fonction G est dérivable sur $[0\ ;60]$

$$G'(x)=-70e^{-\frac{x}{5}}-\frac{1}{5}(-70x-560)e^{\frac{-x}{5}}=\left(-70-\frac{1}{5}(-70x-560)\right)e^{\frac{-x}{5}}=(-70+14x+112)e^{\frac{-x}{5}}$$

$$G'(x)=(14x+42)e^{\frac{-x}{5}}=g(x)$$

La fonction G est bien une primitive de la fonction g

4)b) Une primitive de la fonction f est:

$F(x)=70x+G(x)$ soit $F(x)=70x+(-70x-560)e^{\frac{-x}{5}}$

4)c) $\mathbf{I} = \int_0^{60} \mathbf{f}(x)\ dx = [\ \mathbf{F}(x)\ ]_0^{60} = \mathbf{F}(60) - \mathbf{F}(0) = 4200 - 4760\, e^{-12} + 560$

$\mathbf{I} = 4760\left(1 - e^{-12}\right) \approx 4760\ u \cdot a$

Partie C:

Il souhaite vernir les deux faces de chaque accoudoir ainsi que le dossier du fauteuil dont l'aire est égale à $5400\ c\,m^2$.

Or il lui reste le quart d'un petit pot de vernis pouvant couvrir $10\ m^2 = 100000\ c\,m^2$ soit $\frac{1}{4} \times 100000 = 25000\ c\,m^2$

Aire des 2 accoudoirs: $2 \times \mathbf{I}$

Aire du dossier: 5400

Aire à vernir: $\mathbf{A} = 2\,\mathbf{I} + 5400 \approx 2 \times 4760 + 5400 \approx 14920\ c\,m^2 < 25000\ c\,m^2$

Donc l'ébéniste aura suffisamment de vernis pour vernir les 2 accoudoirs et le dossier.