Correction: Antilles-Guyane 18 Juin 2019

Exercice 1:

Partie A:

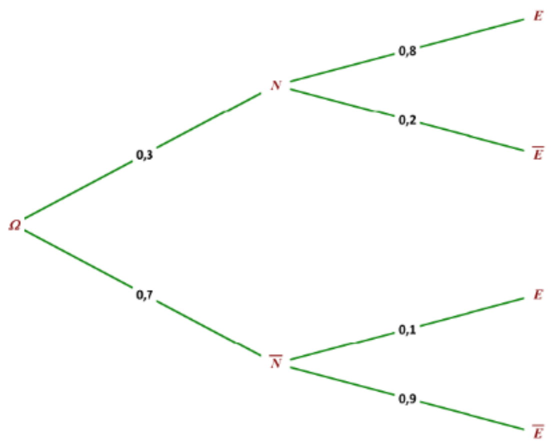
1) Chaque client tire au hasard une carte sur laquelle figure un nombre de 1 à 50

N : "le client découvre un numéro entre 1 et 15": $\mathbf{P(N)=\frac{15}{50}=\frac{3\times 5}{5\times 10}=\frac{3}{10}=0,3}$

On sait que le client a tiré un nombre compris entre 1 et 15, il fait donc tourner la roue divisée en 10 secteurs, dont 8 avec une étoile

Donc $\mathbf{P_N(E)=\frac{8}{10}=0,8}$

2) Arbre pondéré:



3) On calcule: $\mathbf{P(E)}$

D'après la formule des probabilités totales:

$\mathbf{P(E)=P(E\cap N)+P\left(N\cap E^{-}\right)=P(N)\times P_N(E)+P\left(N^{-}\right)\times P_{N^{-}}(E)=0,3\times 0,8+0,7\times 0,1=0,24+0,07}$

$\mathbf{P(A)=0,31}$

3) On calcule: $\mathbf{P_E(N):?}$

$$\mathbf{P_E(N)=\frac{P(E\cap N)}{P(E)}=\frac{P(N)\times P_N(E)}{P(A)}=\frac{0,3\times 0,8}{0,31}}$$

$$\mathbf{P_E(N)=\frac{0,24}{0,31}\approx 0,774}$$

Partie B:

1) **X** suit une loi binomiale de paramètres $\mathbf{n=100}$ et $\mathbf{p=0,31}$

2) A la calculatrice on obtient: $\mathbf{P\left(X=30\right)\approx 0\ ,\ 085}$

3) Nombre moyen de tickets gagnants $\mathbf{E(X)=n\times p=100\times 0,31=31}$

Le montant moyen de la somme offerte en bons d'achat est: $\mathbf{31\times 10=310>250}$

Le budget prévisionnel est insuffisant.

Partie C:

1) **X** suit une loi normale d'espérance $\mathbf{\mu=45}$ et $\mathbf{\sigma=5}$

A la calculatrice, on trouve: $\mathbf{P\left(30\leqslant X\leqslant 60\right)\approx 0,997}$

2) On veut calculer: $\mathbf{P\left(X\geqslant 50\right)\approx 0,159}$

La probabilité qu'un client choisi au hasard reste plus de 50 minutes dans ce magasin est environ $\mathbf{0,159}$

Exercice 2:

1) Le bambou voit sa taille augmenter de $\mathbf{5\ \%}$ d'un mois sur l'autre auxquels s'ajoute $\mathbf{20\ cm}$ et $\mathbf{u_0=100}$

$$\mathbf{u_1=\left(1+\frac{5}{100}\right)u_0+20=1,05\times 100+20=125}$$

$$\mathbf{u_2=\left(1+\frac{5}{100}\right)u_1+20=1,05\times 125+20=151,25}$$

2) $\mathbf{u_n}$ représente la taille qu'aurait le bambou à la fin du $\mathbf{n^{ième}}$ mois

$\mathbf{u_{n+1}}$ représente la taille qu'aurait le bambou à la fin du $\mathbf{(n+1)^{ième}}$ mois

La taille augmente d'un mois sur l'autre de $\mathbf{5\ \%}$, soit $\mathbf{1,05\times u_n}$ auxquels on rajoute $\mathbf{20\ cm}$ donc on a:

$\mathbf{u_{n+1}=1,05\ u_n+20}$

3)a) $\mathbf{v_n=u_n+400}$

$$\mathbf{v_{n+1}=u_{n+1}+400=\left(1,05\times u_n+20\right)+400=1,05\times u_n+420}$$

$$\mathbf{v_{n+1}=1,05\times\left(u_n+\frac{420}{1,05}\right)=1,05\times\left(u_n+400\right)=1,05\times v_n}$$

Donc la suite $\left(v_n\right)$ est une suite géométrique de raison $\mathbf{q=1,05}$ et $\mathbf{v_0=u_0+400=100+400=500}$

3)b) Expression de $\mathbf{v_n}$ en fonction de n: $\mathbf{v_n=v_0\times q^n=500\times 1,05^n}$

3)c) Expression de $\mathbf{u_n}$ en fonction de n: $\mathbf{v_n=u_n+400\iff u_n=v_n-400}$ donc $\mathbf{u_n=500\times 1,05^n-400}$

3)d) A la fin du $7^{ième}$ mois: $n = 7$ d'où $u_7 = 500 \times 1{,}05^7 - 400 \approx 304$

Le bambou mesurera $3{,}04\ m$ à la fin du $7^{ième}$ mois

4)a) Tableau:

Test $U < 200$		Vrai	Vrai	Vrai	Faux
Valeur de n	0	1	2	3	4
Valeur de U	100	125	151,25	178,81	207,8

4)b) On trouve à la fin de l'exécution de l'algorithme $n = 4$

Par conséquent, la taille du bambou dépassera $2\ m$ à la fin du $4^{ième}$ mois

4)c) Algorithme:

Variables: **N entier et U réel**
Initialisation: **N prend la valeur 0**
U prend la valeur 50
Traitement: **Tant que $U < 1000$**
U prend la valeur $1{,}05 \times U + 20$
N prend la valeur $N + 1$
Fin Tant que
Sortie: **Afficher N**

Exercice 3:

Partie A:

1) Graphiquement, la tangente T passe par les points $A\ (-5\ ;\ 1{,}5)$ et $B\ (-10\ ;\ 3)$

a est le coefficient directeur: $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{3 - 1{,}5}{-10 + 5} = \dfrac{1{,}5}{5} = 0{,}3$ soit $a = \dfrac{1}{3}$

Réponse A

2) Sur $[-10\ ;\ -5]$ il semblerait que la courbe C_f soit en-dessous de ses tangentes: donc ***concave***

Sur $[-5\ ;\ 5]$ il semblerait que la courbe C_f soit soit au-dessus de ses tangentes: donc ***convexe***

Réponse D

3) Graphiquement: l'aire du domaine S en unité d'aire $4 \leqslant S \leqslant 7$

Réponse B

Partie B:

1)a) La fonction f est dérivable sur $[-10\ ;\ 5]$, $f(x) = (x - 5)\ e^{0{,}2x} + 5$

(forme $f(x) = u(x) \times v(x)$, dérivée $f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$)

$f'(x) = e^{0{,}2x} + 0{,}2\ (x - 5)\ e^{0{,}2x} = (1 + 0{,}2\ x - 5 \times 0{,}2)\ e^{0{,}2x} = (1 + 0{,}2\ x - 1)\ e^{0{,}2x}$

$f'(x) = 0{,}2\ x\, e^{0{,}2x}$

1)b) Tableau de variations:

$f'(x) = 0{,}2\ x\, e^{0{,}2x}$, le signe de la dérivée dépend du signe de (x) :

x	-10 0 5
x	$-$ 0 $+$

x	-10		0		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(-10)$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(5)$

avec $\begin{cases} f(-10) = 5 - 15\ e^{-2} \\ f(0) = 0 \\ f(5) = 5 \end{cases}$

1)c) Le coefficient directeur de la tangente T au point d'abscisse $a = -5$ est: $f'(-5) = -e^{-1}$

2)a) $f'(x) = 0{,}2\ x\, e^{0{,}2x}$, la fonction f' est dérivable sur $[-10\ ;\ 5]$

$f''(x) = 0{,}2\ e^{0{,}2x} + 0{,}2\ x \times \left(0{,}2\ e^{0{,}2x}\right) = (0{,}2 + 0{,}2 \times 0{,}2\ x)\ e^{0{,}2x} = (0{,}2 + 0{,}04\ x)\ e^{0{,}2x}$

$f''(x) = (0{,}2 + 0{,}04\ x)\ e^{0{,}2x}$, le signe de $f''(x)$ dépend du signe de $(0{,}2 + 0{,}04\ x)$:

x	-10 -5 5
$0{,}2 + 0{,}04\ x$	$-$ 0 $+$

avec $0{,}2 + 0{,}04\ x = 0 \Leftrightarrow x = -5$

D'où le tableau suivant:

x	-10		-5		5
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		*concave*	|	*convexe*	

3)a) **F** est une primitive de f sur $[-10\ ;\ 5]$ est: $F(x) = (5\ x - 50)\ e^{0{,}2x} + 5\ x$

$I = \int_0^5 f(x)\ dx = [\ F(x)\ ]_0^5 = F(5) - F(0) = -25\ e^1 + 25 - (-50)$

$I = 75 - 25\ e$

3)b) Aire du domaine situé sous la droite d'équation $y = x$, de l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 5$

$A = \int_0^5 x\ dx = \left[\ \dfrac{x^2}{2}\ \right]_0^5 = \left(\dfrac{5^2}{2}\right) - 0 = \dfrac{25}{2} = 12{,}5\ u \cdot a$

3)c) Aire du domaine S :

$S = \int_0^5 (x - f(x))\ dx = A - I = 12{,}5 - (75 - 25\ e) = -62{,}5 + 25\ e$

$S \approx 5{,}46\ u \cdot a$

Exercice 4:

1) ***Rappel:***

Une grandeur évolue d'une valeur initiale v_i à une valeur finale v_f

Le rapport $\dfrac{v_f - v_i}{v_i}$ s'appelle le taux d'évolution de v_i à v_f

$\dfrac{v_f - v_i}{v_i} = \dfrac{t}{100}$ ***, t % est le pourcentage d'évolution de v_i à v_f***

Entre 2014 et 2015, le taux d'évolution de l'émission de CO_2 est:

$\dfrac{14,7-15}{15} = \dfrac{t}{100} = -0,02$ donc $t = -2\ \%$

L'entreprise a diminué ses émissions de CO_2 de $2\ \%$ entre 2014 et 2015

2) On suppose que le taux de diminution annuel de CO_2 émis restera constant pendant les années suivantes

Le coefficient multiplicateur associé à cette baisse est: $1 - \dfrac{2}{100} = 1 - 0,02 = 0,98$

On veut trouver n tel que : $15 \times 0,98^n \leqslant 12 \iff 0,98^n \leqslant \dfrac{12}{15} = \dfrac{3\times4}{3\times5} = \dfrac{4}{5} = 0,8$

La fonction "ln" est croissante sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$

$\ln\ 0,98^n \leqslant \ln\ (0,8) \iff n \times \ln\ (0,98) \leqslant \ln\ (0,8)$

On sait que: $0,98 \leqslant 1 \iff \ln\ (0,98) \leqslant \ln\ 1 \iff \ln\ (0,98) \leqslant 0$

Par conséquent, on a: $n \geqslant \dfrac{\ln\ (0,8)}{\ln\ (0,98)}$ avec $\dfrac{\ln\ (0,8)}{\ln\ (0,98)} \approx 11,04$

Le plus petit entier naturel est donc $n = 12$

A partir de $2014 + 12 = 2026$ la quantité de CO_2 émise par l'entreprise sera inférieure à 12 milliers de tonnes.