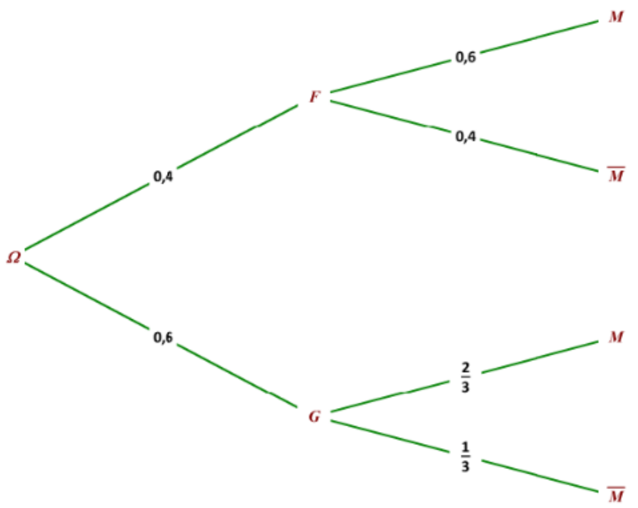
Correction: Nouvelle Calédonie mars 2019

Exercice 1:

Partie A:

1)a) Arbre pondéré:



2) L'éléve est une fille ET a obtenue une note supérieure ou égale à 7 sur 14

$\mathbf{P\,(F \cap M) = P\,(F) \times P_F\,(M) = 0,4 \times 0,6 = 024}$

3) On sait que $\mathbf{P\,(M) = 0,64}$

D'après la formule des probabilités totales:

$\mathbf{P\,(M) = P\,(M \cap F) + P\,(M \cap G) = 0,64}$

D'où $\mathbf{P\,(M \cap G) = 0,64 - P\,(M \cap F) = 0,64 - 0,24}$

Soit $\mathbf{P\,(M \cap G) = 0,4}$

On en déduit que : $\mathbf{P_G\,(M) = \dfrac{P\,(M \cap G)}{P\,(G)} = \dfrac{0,4}{0,6} = \dfrac{2}{3} \approx 0,667}$

4) On veut calculer : $\mathbf{P_M\,(F) = \dfrac{P\,(M \cap F)}{P\,(M)} = \dfrac{0,4 \times 0,6}{0,64} = \dfrac{0,24}{0,64} = 0,375}$

Partie B:

$\mathbf{X}$ est la variable aléatoire qui compte le nombre de filles de ce groupe ayant une note supérieure ou égale à 7

$\mathbf{X}$ suit une loi binomiale de paramètres $n = 70$ et $p = 0,6$: $\mathbf{X \sim B\,(70\,;\,0,6)}$

$$\mathbf{P\left(X = 30\right) = \binom{70}{30} p^{30} \times (1-p)^{70-30} = \binom{70}{30} \times 0,6^{30} \times 0,4^{40}}$$

$\mathbf{P\left(X = 30\right) \approx 0,0015}$

Partie C:

$\mathbf{Y}$ suit une loi normale d'espérance $\mu = 11,8$ et d'écart type $\sigma = 1,2$

1) $\mathbf{P\left(10 \leqslant Y \leqslant 13\right) = P\left(Y \leqslant 13\right) - P\left(Y \leqslant 10\right)}$

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{P\left(10 \leqslant Y \leqslant 13\right) \approx 0,841 - 0,067}$

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{P\left(10 \leqslant Y \leqslant 13\right) \approx 0,774}$

2) $\mathbf{P\left(Y \leqslant \alpha\right) = 0,8}$

A l'aide de la calculatrice on obteint: $\alpha \approx 12,8$

Conclusion: 80% des élèves ont une VMA inférieure ou égale à $\mathbf{12,8}\ km/h$

Exercice 2:

Partie A:

1) $\mathbf{f}\,(x) = \dfrac{\ln\,(x)}{x}$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$$

$$\begin{cases} u\,(x) = \ln\,(x) \\ v\,(x) = x \end{cases} \qquad \begin{cases} u'\,(x) = \dfrac{1}{x} \\ v'\,(x) = 1 \end{cases}$$

$$\mathbf{f}'\,(x) = \frac{\dfrac{1}{x} \times x - \ln\,(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln\,(x)}{x^2}$$

$$\mathbf{f}'\,(e) = \frac{1 - \ln\,(e)}{e^2} = 0$$

Réponse a

2) Soit t le taux annuel; on a:

$\left(1 + \dfrac{t}{100}\right)^8 = \mathbf{1,8}$ (car le tarif a augmenté de 80% entre janvier 2005 et décembre 2012)

$1+\frac{t}{100}=1{,}8^{\frac{1}{8}} \Leftrightarrow \frac{t}{100}=1{,}8^{\frac{1}{8}}-1 \Leftrightarrow t=100\times\left(1{,}8^{\frac{1}{8}}-1\right)$
$t\approx 7{,}62\ \%$
Réponse b
3) On considère $\left(u_n\right)$ la suite géométrique de raison $q=1{,}05$ et de premier terme $u_1=3$
valeur de : $S=u_1+u_2+\cdot\cdot\cdot+u_{49}$
$S=1^{er}\ terme\times\frac{1-q^{nbre\cdot de\cdot termes}}{1-q}=u_1\times\frac{1-1{,}05^{49}}{1-1{,}05}$
$S=3\times\frac{1-1{,}05^{49}}{1-1{,}05}$
Réponse d
4) Le temps d'attente d'un client, exprimé en minutes suit une loi uniforme sur $[0\ ;\ 12]$
Soit T la variable aléatoire qui correspond au temps d'attente
On veut calculer : $P\left(2\leqslant T\leqslant 5\right)=\frac{5-2}{12-0}=\frac{3}{12}=\frac{3}{3\times4}=\frac{1}{4}$
Réponse a
Partie B:
Affirmation 1:
Intervalle de confiance: $I_C=\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}}\ ;f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$
Amplitude de cet intervalle: $\frac{2}{\sqrt{n}}\leqslant 0{,}02 \Leftrightarrow \frac{2}{0{,}02}\leqslant\sqrt{n} \Leftrightarrow 100\leqslant\sqrt{n}$ soit $n\geqslant 10000$
Affirmation 1: VRAIE
Affirmation 2:
On considère une variable aléatoire X suivant une loi normale de moyenne $\mu=6$.
De plus graphiquement, la partie grisée correspond à: $P\left(0\leqslant X\leqslant 12\right)=0{,}95$
On sait que: $P\left(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma\right)\approx 0{,}95$ soit $P\left(6-2\sigma\leqslant X\leqslant 6+2\sigma\right)\approx 0{,}95$
Ce qui correspond à : $6-2\sigma=0 \Leftrightarrow 2\sigma=6 \Leftrightarrow \sigma=3$
Affirmation 2: FAUSSE

Exercice 3:
1)a) Il y a 160 enfants inscrits en 2017, on en garde $80\ \%$ et il y a 50 nouveaux.
Donc le nombre d'inscrits à l'été 2018: $160\times0{,}8+50=178$
1)b) $\frac{178}{10}=17{,}8$, par conséquent il faut prévoir au minimum 18 tentes pour loger les inscrits pendant l'été 2018.
2) Soit u_n le nombre d'inscrits en 2017, $80\ \%$ des inscrits se réinscrivent l'année suivante:
soit $0{,}8\times u_n$, le coefficient multiplicateur est $0{,}8$
Chaque année 50 nouveaux enfants s'inscrivent.
Donc $u_{n+1}=0{,}8\times u_n+50$.
3)a) Formule: dans la cellule $C\,2$ on note: $=0{,}8\times B\,2+50$
3)b) Tableau:

indice n	0	1	2	3	4	5
valeur de u_n	160	178	192	204	213	221

3)c) Estimation du nombre d'inscrits en 2021: $2017+4=2021$, le nombre d'inscrit sera de 213 .
4)a) $v_n=u_n-250$ et $v_0=u_0-250=160-250=-90$
$v_{n+1}=u_{n+1}-250=0{,}8\times u_n+50-250$
$=0{,}8\times u_n-200=0{,}8\left(u_n-\frac{200}{0{,}8}\right)$
$=0{,}8\left(u_n-250\right)$
$=0{,}8\times v_n$
La suite $\left(v_n\right)$ est une suite géométrique de raison $q=0{,}8$ et de premier terme $u_0=-90$
4)b) Expression de v_n en fonction de n:
$v_n=v_0\times q^n=-90\times(0{,}8)^n$
4)c) Expression de u_n en fonction de n:
$v_n=u_n-250 \Leftrightarrow u_n=v_n+250$
D'où $u_n=250-90\times(0{,}8)^n$
4)d) $u_n=250-90\times(0{,}8)^n$ avec $0<q=0{,}8<1$
$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(0{,}8^n\right)=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n\right)=250$
Au bout d'un grand nombre d'années, le nombre d'inscrits va se stabiliser vers 250 .

5)a) Algorithme:

Variables:	N entier et u réel
Initialisation:	U prend la valeur **160**
	N prend la valeur **0**
Traitement:	Tant que $\mathbf{U<220}$ faire
	U prend la valeur $\mathbf{0{,}8\times U+50}$
	N prend la valeur $\mathbf{N+1}$
	Fin Tant que
Sortie:	Afficher N

5)b) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que: $u_n \geqslant 220$

$u_n \geqslant 220 \Leftrightarrow 250-90\times(0{,}8)^n \geqslant 220 \Leftrightarrow -90\times(0{,}8)^n \geqslant 220-250 \Leftrightarrow -90\times(0{,}8)^n \geqslant -30$

$\Leftrightarrow 90\times(0{,}8)^n \leqslant 30 \Leftrightarrow (0{,}8)^n \leqslant \dfrac{30}{90} \Leftrightarrow (0{,}8)^n \leqslant \dfrac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \ln 0{,}8^n \leqslant \ln\left(\dfrac{1}{3}\right) \Leftrightarrow n \ln 0{,}8 \leqslant -\ln 3 \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{-\ln 3}{\ln 0{,}8} \approx 4{,}92$

On trouve $\mathbf{N=5}$ d'après le tableau question 3)b), on a: $u_5 \approx 221$

Exercice 4:

Partie A:

1) Déterminer $\mathbf{f(0)}$: graphiquement on trouve: $\mathbf{f(0)=3}$

2) Déterminer $\mathbf{f'(0)}$:

Le coeeficient de la tangente T au point d'abscisse $a=0$ est:

La tangente passe par les points $\mathbf{A\ (0\ ;\ 3)}$ et $\mathbf{C\ (3\ ;\ 0)}$, le coefficient directeur est: $m=\dfrac{y_C-y_A}{x_C-x_A}$

$m=\dfrac{0-3}{3-0}=\dfrac{-3}{3}=-1$

Donc $f'(0)=-1$

Equation de la tangente T au point d'abscisse $a=0$:

$y=\mathbf{f}'(0)\times(x-0)+f(0)=-1\times(x-0)+3$

$y=-x+3$

La tangente T au point d'abscisse $a=0$ est: $y=-x+3$

3) Graphiquement la courbe semble être croissante sur l'intervalle $[-2\ ;\ -1]$ et croissante sur l'intervalle $[-1\ ;\ 6]$

De plus la courbe possède une tangente horizontale au point $\mathbf{B}\left(-1\ ;y_B\right)$ ce qui signifie $f'(-1)=0$

Conclusion:

x	-2 $\quad$ -1 $\quad$ 6
$\mathbf{f}'(x)$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$

4) Convexité:

Le point A est l'unique ***point d'inflexion*** de la courbe sur l'intervalle $[-2\ ;\ 6]$

La fonction f est ***concave*** sur l'intervalle $[-2\ ;\ 0]$ et ***convexe*** sur l'intervalle $[0\ ;\ 6]$

5) Encadrement de $\mathbf{I}=\displaystyle\int_{-1}^{0} \mathbf{f}(x)\ dx$

Sur l'intervalle $[-1\ ;\ 0]$ la fonction f est positive.

$\mathbf{I}$ représente l'aire comprise entre la courbe $\mathbf{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=-1$ et $x=0$

Conclusion : $3 \leqslant \mathbf{I} \leqslant 4$

Partie B:

1) Valeur de $\mathbf{f(6)}$?

$\mathbf{f}(6)=(6+2)\,e^{-6}+1=8\times e^{-6}+1=\dfrac{8}{e^6}+1\approx 1{,}02$

2) $x\in[-2\ ;\ 6]$, $\mathbf{f}'(x)=1\times e^{-x}-(x+2)\times e^{-x}=(1-x-2)\times e^{-x}$

forme: $(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$ avec $\begin{cases} u(x)=x+2 \\ v(x)=e^{-x} \end{cases}$ d'où $\begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=-e^{-x} \end{cases}$

Soit $\mathbf{f}'(x)=(-x-1)\times e^{-x}$

3) $x\in[-2\ ;\ 6]$ et $\mathbf{f}'(x)=(-x-1)\times e^{-x}$

Tableau de variations:

$\mathbf{f}'(x)$ est du signe de $(-x-1)$ car $e^{-x}>0$

Signe de $(-x-1)$: $-x-1=0 \Leftrightarrow x=-1$

x	$-\infty$ $\quad$ -1 $\quad$ $+\infty$
$-1-x$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$

Le tableau de vairations de la fonction f sur l'intervalle $[-2\ ;\ 6]$:

x	-2 $\quad$ -1 $\quad$ 6
$\mathbf{f}'(x)$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$
$\mathbf{f}(x)$	$1 \nearrow$ $e+1$ $\searrow 8e^{-6}+1$

4)a) 0n sait que : $\left((-x-3)\times e^{-x}\right)' = (x+2)\times e^{-x}$

$\mathbf{f}(x)\ \ (x+2)\times e^{-x}+1 = \mathbf{F}'(x)$

$\mathbf{F}(x) = (-x-3)\times e^{-x}+x$

f est une primitive de f

4)b) Valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$: $m = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b \mathbf{f}(x)\ dx = \dfrac{1}{b-a}\times[\ \mathbf{F}(x)\ ]_a^b$

Valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[-1\ ;\ 0]$

$m = \dfrac{1}{0-(-1)}\displaystyle\int_{-1}^0 \mathbf{f}(x)\ dx = [\ \mathbf{F}(x)\ ]_{-1}^0 = \mathbf{F}(0)-\mathbf{F}(-1)$

Avec $\mathbf{F}(0) = -3\,e^0+0 = -3$ et $\mathbf{F}(-1) = (1-3)\,e^1-1 = -2\,e-1$

D'où $m = -3-(-2\,e-1) = -3+2\,e+1$

Donc $m = 2\,e-2 \approx 3{,}4$ (arrondie au dixième)