Correction Antilles-Guyane ES 2018

Exercice 1:

1) La fonction f est continue et dérivable sur l'intervalle $[-10\ ;\ 10]$, $f(x) = (2x-3)\,e^{-3x}$

Forme $u \times v$ avec $u = (2x-3)$ et $v = e^{-3x}$, sa dérivée est de la forme $u' \times v + u \times v'$ avec $u' = 2$ et $v' = -3\,e^{-3x}$

$f'(x) = 2\,e^{-3x} + (2x-3) \times \left(-3\,e^{-3x}\right) = 2\,e^{-3x} - 6\,x\,e^{-3x} + 9\,e^{-3x} = (11-6x)\,e^{-3x}$

Signe de la dérivée dépend du signe de $(11-6x)$ car $e^{-3x} > 0$

Tableau de variation:

x	-10	$\frac{11}{6}$	10
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$f(-10) < 0 \nearrow$	$f\left(\frac{11}{6}\right) > 0$	$\searrow f(10) > 0$

$$\begin{cases} f(-10) < 0 \\ f\left(\frac{11}{6}\right) \approx 0{,}0027 > 0 \\ f(10) > 0 \end{cases}$$

L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $\left[-10\ ;\ \frac{11}{6}\right]$ (Corollaire Théorème des valeurs intermédiaires)

Réponse B

2) $f(x) = \ln x$ et f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et $f'(x) = \frac{1}{x}$

Tangente à la courbe au point d'abscisse $a = 1$

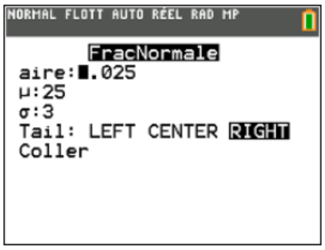
$y = f'(1)\,(x-1) + f(1) = 1\,(x-1) + 0 = x - 1$

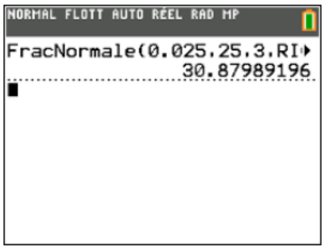
Réponse B

3) X suit une loi normale de paramètres $\mu = 25$ et $\sigma = 3$

$P\left(X > t\right) = 0{,}025$

A la calculatrice on trouve:





$t \approx 30{,}88$

Réponse D

4) T variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[8{,}5\ ;\ 10]$

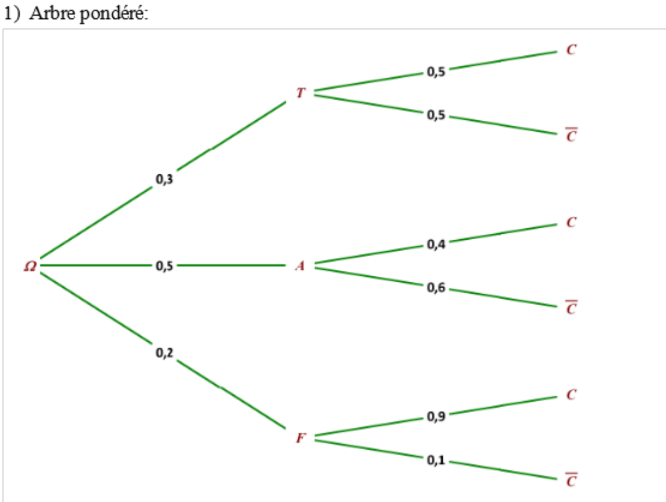
On doit calculer $P\left(9 \leqslant T \leqslant 10\right) = \frac{10-9}{10-8{,}5} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$

Réponse B

Exercice 2:

Partie A:

1) Arbre pondéré:



2) Victor obtient et conserve un personnage type "air", on doit donc calculer:

$P(A \cap C) = P(A) \times P_A(C) = 0{,}5 \times 0{,}4 = 0{,}2$

3) Victor conser le personnage obtenu en début de partie:

$P(C) = P(T \cap C) + P(A \cap C) + P(F \cap C) = P(T) \times P_T(C) + P(A) \times P_A(C) + P(F) \times P_F(C)$

$P(C) = 0{,}3 \times 0{,}5 + 0{,}2 + 0{,}2 \times 0{,}9 = 0{,}53$

4) On sait que Victor a conservé son personneobtenu en début de partie, on veut calculer:

$P_C(A) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{0{,}2}{0{,}53} \approx 0{,}38$

Partie B:

1) On fait 10 tirages de façons aléatoires, indépendantes et identiques.
A chaque tirage il y a deux issues:

- Le personnage est de type "terre" avec $P(T) = p = 0,3$
- Le personne n'est pas de type "terre" avec $q = 1 - p = 1 - 0,3 = 0,7$

La variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,3$

2) A la calculatrice, on obtient:

$$P(Y=3) = \binom{10}{3} p^3 (1-p)^{10-3} \approx 0,267$$

3) L'événement contraire est: Victor n'a obtenu pas le personnage de type "terre" lors de ses 10 parties:

$$P(Y=0) + P(Y \geqslant 1) = 1 \iff P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y=0) = 1 - \binom{10}{0} p^0 (1-p)^{10} \approx 0,972$$

Exercice 3:

1)a) $\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = u_n + 0,4 \end{cases}$ la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 0,4$ et de permier terme $u_0 = 10$

$\begin{cases} v_0 = 8 \\ v_{n+1} = 1,028 \times v_n \end{cases}$ la suite (v_n) est une suite géométique de raison $q = 1,028$ et de permier terme $v_0 = 8$

1)b) Expression de u_n en fonction de n:

$u_n = u_0 + n \times r$ d'où $u_n = 10 + 0,4\, n$

Expression de v_n en fonction de n:

$v_n = v_0 \times q^n$ d'où $v_n = 8 \times (1,028)^n$

2) A la sortie de l'algorithme, n a pour valeur 46
Cela signifie qu'à partir du rang $n = 46$, $u_n \leqslant v_n$

3)a) En 1800, la population de l'Angleterre était estimée à 8 millions
On admet que la population augmente de 2,8% chaque année
En 1810, la population était de:

$v_{10} = 8 \times (1,028)^{10} \approx 10,54$

La population était de **10540000** habitants environ

3)b) A partir de quelle nnée la population aurait-elle dépassé 16 millions:

$$v_n \geqslant 16 \iff 8 \times (1,028)^n \geqslant 16 \iff (1,028)^n \geqslant \frac{16}{8} = 2$$

La fonction "ln" est croissante sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$

$$\ln 1,028^n \geqslant \ln 2 \iff n \ln 1,028 \geqslant \ln 2 \text{ car } 1,028 \geqslant 1 \iff \ln 1,028 \geqslant \ln 1 = 0$$

Donc $n \geqslant \dfrac{\ln 2}{\ln 1,028}$ comme $\dfrac{\ln 2}{\ln 1,028} \approx 25,1$ alors $n = 26$

Conclusion: A partir de **1826** la population aurait dépassé 16 millions d'habitants.

3)c) En 1800 l'agriculture anglaise pouvait nourrir 10 millions de personnes et les progrés de cette dernière permettent de nourrir 0,4 million de personnes de plus
D'après la question 2), on a pour $n = 46$, $u_n \leqslant v_n$

Conclusion: En 1846, la population de l'Angleterre serait devenue trop grande pour ne plus être suffisamment nourrie par son agriculture.

Exercice 4:

Partie A:

1) La fonction f semble atteindre son maximum dans l'intervalle $[1\ ;2]$

2)a) La fonction semble être convexe dans l'intervalle $[3\ ;5]$ car $f''(x) \geqslant 0$ (figure $C_{(f'')}$)

2)b) La fonction f'' semble s'annuler en changeant de signe en $x = x_0$ avec $2 < x_0 < 3$

La fonction f possède un point d'inflexion et son abscisse est compris entre 2 et 3.

3) La tangente au point d'abscisse $a = 0$ est: $y = f'(0)\ (x-0) + f(0) = f'(0)\ x + f(0)$

Graphe $C_{(f')}$: on lit $f'(0) = 2$

Graphe C_f : on lit $f(0) = 0$

Conclusion: $y = 2x$

4) D'après le graphe $C_{(f')}$, on a $f'(x) \geqslant 0$ sur l'intervalle $[0\ ;1]$

Donc I correspond à l'aire du domaine compris entre la courbe $C_{(f')}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$

Partie B:

1)a) $f(x) = (x^2 + 2x)\, e^{-x}$, la fonction f est dérivable sur $[0\ ;5]$

forme $u \times v$ avec $\begin{cases} u = (x^2 + 2x) \\ v = e^{-x} \end{cases}$ forme dérivée: $u' \times v + u \times v'$ avec $\begin{cases} u' = 2x + 2 = 2(x+1) \\ v' = -e^{-x} \end{cases}$

$$f'(x) = 2(x+1)\, e^{-x} + (x^2 + 2x) \times (-e^{-x}) = [2x + 2 - x^2 - 2x] \times e^{-x} = (2 - x^2)\, e^{-x}$$

1)b) $f'(x) = (2 - x^2)\, e^{-x}$

Le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $(2 - x^2)$ car $e^{-x} > 0$

Signe de $(2 - x^2)$:

$$2 - x^2 = (\sqrt{2})^2 - x^2 = (\sqrt{2} - x) \times (\sqrt{2} + x) = 0$$

Les solutions sont : $\begin{cases} \sqrt{2} - x = 0 \\ \sqrt{2} + x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sqrt{2} \in [0\ ;5] \\ x = -\sqrt{2} \notin [0\ ;5] \end{cases}$

Le signe devant x^2 étant négatif on a: $\begin{cases} f'(x) \leqslant 0, ?\quad x \in [\sqrt{2}\ ;5] \\ f'(x) \geqslant 0, ? x \in [0\ ;\sqrt{2}] \end{cases}$

Tableau de variation:

x	0	$\sqrt{2}$	5
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$f(0)\nearrow$	$f(\sqrt{2})$	$\searrow f(5)$

avec $\begin{cases} f(0)=0 \\ f(\sqrt{2})=(2+2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}} \approx 1{,}1738 \\ f(5)=35e^{-5} \approx ? \approx 0{,}24 \end{cases}$

1)c) Le maximum est atteint pour $x=\sqrt{2}$ et vaut $f(\sqrt{2})=(2+2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}} \approx 0{,}174$ (arrondie au millième)

2) Une primitive de la fonction f' est par définition la fonction f donc on a:

$$\int_0^1 f'(x)\,dx=[f(x)]_0^1=f(1)-f(0)=f(1)$$

Les deux valeurs sont égales.