B A C C A L A U R É A T G É N É R A L

SESSION 2018

MATHÉMATIQUES

Série : **S**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures.** – COEFFICIENT : **7**

Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1 à 8 ;

l'annexe page 8 est à rendre avec la copie.

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (5 *points*)

Commun à tous les candidats

L'exploitant d'une forêt communale décide d'abattre des arbres afin de les vendre, soit aux habitants de la commune, soit à des entreprises. On admet que :

- parmi les arbres abattus, 30 % sont des chênes, 50 % sont des sapins et les autres sont des arbres d'essence secondaire (ce qui signifie qu'ils sont de moindre valeur) ;
- 45,9 % des chênes et 80 % des sapins abattus sont vendus aux habitants de la commune ;
- les trois quarts des arbres d'essence secondaire abattus sont vendus à des entreprises.

Partie A

Parmi les arbres abattus, on en choisit un au hasard.
On considère les événements suivants :

- C : « l'arbre abattu est un chêne » ;
- S : « l'arbre abattu est un sapin » ;
- E : « l'arbre abattu est un arbre d'essence secondaire » ;
- H : « l'arbre abattu est vendu à un habitant de la commune ».

1. Construire un arbre pondéré complet traduisant la situation.
2. Calculer la probabilité que l'arbre abattu soit un chêne vendu à un habitant de la commune.
3. Justifier que la probabilité que l'arbre abattu soit vendu à un habitant de la commune est égale à $0{,}5877$.
4. Quelle est la probabilité qu'un arbre abattu vendu à un habitant de la commune soit un sapin ?
   On donnera le résultat arrondi à 10^{-3}.

Partie B

Le nombre d'arbres sur un hectare de cette forêt peut être modélisé par une variable aléatoire X suivant une loi normale d'espérance $\mu = 4000$ et d'écart-type $\sigma = 300$.

1. Déterminer la probabilité qu'il y ait entre 3 400 et 4 600 arbres sur un hectare donné de cette forêt. On donnera le résultat arrondi à 10^{-3}.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait plus de 4 500 arbres sur un hectare donné de cette forêt. On donnera le résultat arrondi à 10^{-3}.

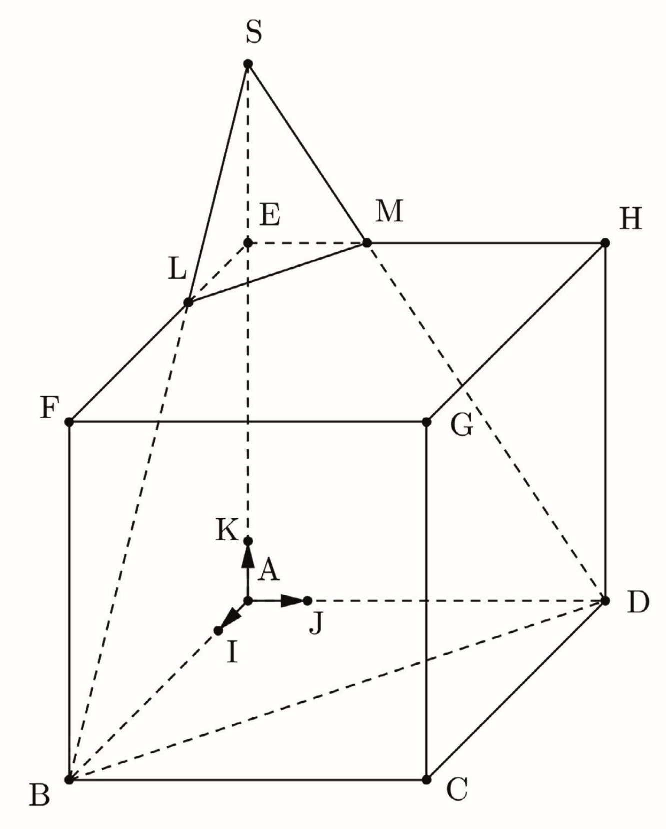
Partie C

L'exploitant affirme que la densité de sapins dans cette forêt communale est de 1 sapin pour 2 arbres.
Sur une parcelle, on a compté 106 sapins dans un échantillon de 200 arbres.
Ce résultat remet-il en cause l'affirmation de l'exploitant ?

Exercice 2 (5 *points*)

Commun à tous les candidats

Un artiste souhaite réaliser une sculpture composée d'un tétraèdre posé sur un cube de 6 mètres d'arête.
Ces deux solides sont représentés par le cube ABCDEFGH et par le tétraèdre SELM ci-dessous.



On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK}\right)$ tel que : $I \in [AB]$, $J \in [AD]$, $K \in [AE]$ et $AI = AJ = AK = 1$, l'unité graphique représentant 1 mètre.
Les points L, M et S sont définis de la façon suivante :

- L est le point tel que $\overrightarrow{FL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FE}$;
- M est le point d'intersection du plan (BDL) et de la droite (EH) ;
- S est le point d'intersection des droites (BL) et (AK).

1. Démontrer, sans calcul de coordonnées, que les droites (LM) et (BD) sont parallèles.

2. Démontrer que les coordonnées du point L sont $(2; 0; 6)$.

3.

a. Donner une représentation paramétrique de la droite (BL) .
b. Vérifier que les coordonnées du point S sont $(0; 0; 9)$.

4. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(3; 3; 2)$.
   a. Vérifier que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (BDL).
   b. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (BDL) est
   $$3x + 3y + 2z - 18 = 0$$
   c. On admet que la droite (EH) a pour représentation paramétrique :
   $$\begin{cases} x = 0 \\ y = s, \quad s \in \mathbf{R} \\ z = 6 \end{cases}$$
   Calculer les coordonnées du point M.

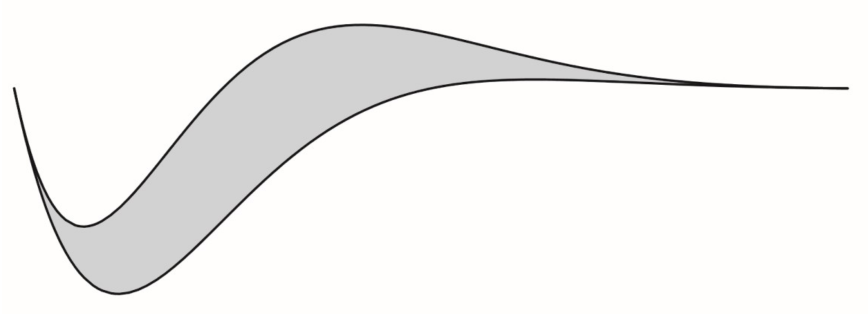
5. Calculer le volume du tétraèdre SELM. On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule suivante :
$$V = \frac{1}{3} \times Aire\ de\ la\ base \times Hauteur.$$

6. L'artiste souhaite que la mesure de l'angle $\widehat{\text{SLE}}$ soit comprise entre 55° et 60°.
Cette contrainte d'angle est-elle respectée ?

Exercice 3 (5 *points*)

Commun à tous les candidats

Un publicitaire souhaite imprimer le logo ci-dessous sur un T-shirt :



Il dessine ce logo à l'aide des courbes de deux fonctions f et g définies sur **R** par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) \quad \text{et} \quad g(x) = -\,\mathrm{e}^{-x} \cos x.$$

On admet que les fonctions f et g sont dérivables sur **R**.

Partie A – Étude de la fonction *f*

1. Justifier que, pour tout $x \in \mathbf{R}$:
$$-\,\mathrm{e}^{-x} \leq f(x) \leq 3\mathrm{e}^{-x}.$$
2. En déduire la limite de f en $+\infty$.
3. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}\,(2\cos x - 1)$ où f' est la fonction dérivée de f.
4. Dans cette question, on étudie la fonction f sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$.
   - **a.** Déterminer le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[-\pi; \pi]$.
   - **b.** En déduire les variations de f sur $[-\pi; \pi]$.

Partie B – Aire du logo

On note C_f et C_g les représentations graphiques des fonctions f et g dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. L'unité graphique est de 2 centimètres. Ces deux courbes sont tracées en **ANNEXE**.

1. Étudier la position relative de la courbe C_f par rapport à la courbe C_g sur **R**.
2. Soit H la fonction définie sur **R** par :
$$H(x) = \left(-\frac{\cos x}{2} - \frac{\sin x}{2} - 1\right)\mathrm{e}^{-x}.$$
   On admet que H est une primitive de la fonction $x \longmapsto (\sin x + 1)\mathrm{e}^{-x}$ sur **R**.

   On note $\mathcal{D}$ le domaine délimité par la courbe C_f, la courbe C_g et les droites d'équation $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{3\pi}{2}$.
   - **a.** Hachurer le domaine $\mathcal{D}$ sur le graphique en annexe à rendre avec la copie.
   - **b.** Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine $\mathcal{D}$, puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près en cm^2.

Exercice 4 (5 *points*)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3 000 cétacés dans cette réserve au 1er juin 2017. Il est inquiet car il sait que le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2 000.

Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :

- entre le 1er juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine ;
- entre le 1er novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite (u_n). Selon ce modèle, pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre de cétacés au 1er juin de l'année $2017+n$. On a donc $u_0 = 3\,000$.

1. Justifier que $u_1 = 2\,926$.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}95u_n + 76$.

3. À l'aide d'un tableur, on a calculé les 8 premiers termes de la suite (u_n). Le directeur a configuré le format des cellules pour que ne soient affichés que des nombres arrondis à l'unité.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7
2	u_n	3 000	2 926	2 856	2 789	2 725	2 665	2 608	2 553

Quelle formule peut-on entrer dans la cellule C2 afin d'obtenir, par recopie vers la droite, les termes de la suite (u_n) ?

4.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1\,520$.

b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

c. Justifier que la suite (u_n) est convergente. On ne cherchera pas ici la valeur de la limite.

5. On désigne par (v_n) la suite définie par, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 1\,520$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95 dont on précisera le premier terme.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1\,480 \times 0{,}95^n + 1\,520$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

6. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés présents dans la réserve marine sera inférieur à $2\,000$.

```
n ← 0
u ← 3 000
Tant que ……
    | n ← ……
    | u ← ……
Fin de Tant que
```

La notation « ⟵ » correspond à une affectation de valeur, ainsi « $n \longleftarrow 0$ » signifie « Affecter à n la valeur 0 ».

7. La réserve marine fermera-t-elle un jour ? Si oui, déterminer l'année de la fermeture.

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Exercice 3