Correction Centres Etrangers S 2018

Exercice 1:

1)a) $f(t)=(0{,}8\,t+0{,}2)\,e^{-0{,}5t}+0{,}03$

$f(20)=(0{,}8\times 20+0{,}2)\,e^{-0{,}5\times 20}+0{,}03\approx 0{,}031$

1)b) Taux Maximal pour $t=1{,}75$

$f(1{,}75)=(0{,}8\times 1{,}75+0{,}2)\,e^{-0{,}5\times 1{,}75}+0{,}03\approx 0{,}697$

Le taux maximal est de $69{,}7\ \%$

2)a) Le taux de CO_2 présent dans le local retrouve une valeur inférieure ou égale à $3{,}5\ \%$

Objectif trouver t tel que $f(t)\leqslant 0{,}035$

Tableau variations:

x	0	$1{,}75$	20
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$0{,}23\nearrow$	$0{,}697$	$\searrow 0{,}031$

Sur $[0\,;1{,}75]$ la fonction est continue et strictement croissante mais $f(0)=0{,}23>0{,}035$

L'équation $f(t)=0{,}035$ n'admet pas de solution sur $[0\,;1{,}75]$

Sur $[1{,}75\,;20]$ la fonction est continue et strictement décroissante et on a : $\begin{cases} f(1{,}75)\approx 0{,}697>0{,}035 \\ f(20)\approx 0{,}031<0{,}035 \end{cases}$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha\in\,]1{,}75\,;20[$ tel que $f(\alpha)=0{,}035$

2)b) A la calculatrice, on trouve: $\begin{cases} f(15{,}65)\approx 0{,}0351>0{,}035 \\ f(15{,}75)\approx 0{,}0349<0{,}035 \end{cases}$

Donc il faut attendre **15 min 45** sec pour obtenir un taux de CO_2 inférieur ou égal à $3{,}5\ \%$

3)a) $F(t)=(-1{,}6\,t-3{,}6)\times e^{-0{,}5t}+0{,}03\,t$

La fonction F est dérivable sur $[0\,;20]$

$F'(t)=-1{,}6\times e^{-0{,}5t}+(-1{,}6\,t-3{,}6)\times\left(-0{,}5\times e^{-0{,}5t}\right)+0{,}03=0{,}8\,t\,e^{-0{,}5t}+(1{,}8-1{,}6)\,e^{-0{,}5t}+0{,}03$

$F'(t)=0{,}8\,t\,e^{-0{,}5t}+0{,}2\,e^{-0{,}5t}+003=(0{,}8\,t+0{,}2)\,e^{-0{,}5t}+0{,}03=f(t)$

Donc F est une primitive de f.

3)b) $\mu=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt=\dfrac{1}{11-0}\int_0^{11} f(t)\,dt=\dfrac{1}{11}\left[F(t)\right]_0^{11}=\dfrac{1}{11}\left(F(11)-F(0)\right)$

$\mu\approx\dfrac{1}{11}(3{,}843)\approx 0{,}349$ (arrondi à 10^{-3})

Exercice 2:

1) On détermine λ:

$E(D)=8=\dfrac{1}{\lambda}\iff\lambda=\dfrac{1}{8}=0{,}125$

D est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle, celle-ci est sans mémoire donc:

$P_{D\geqslant 3}\left(D\geqslant 10\right)=P_{D\geqslant 3}\left(D\geqslant 3+7\right)=P\left(D\geqslant 7\right)=e^{-7\lambda}\approx 0{,}42$

Affirmation vraie

2) Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de dépistages positifs.

On effectue **200** tirages indépendants, aléatoires et identiques.

Chaque tirage possède 2 issues :

- "le test est positif" dont la probabilité est $p=0{,}031$
- "le test est négatif" dont la probabilité est $q=1-p=0{,}969$.

X suit une loi binomiale de paramètres $n=200$ et $p=0{,}031$

A la calculatice, on trouve:

$P\left(X>5\right)=1-P\left(X\leqslant 5\right)\approx 0{,}49$

Affirmation vraie

3) $\ln(6x-2)+\ln(2x-1)=\ln(x)$

$\begin{cases} 6x-2>0 \\ 2x-1>0 \\ x>0 \end{cases}\iff\begin{cases} x>\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3} \\ x>\dfrac{1}{2} \\ x>0 \end{cases}$

Donc on peut résoudre l'équation que sur l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$

$\ln(6x-2)+\ln(2x-1)=\ln(x)\iff\ln\left[(6x-2)(2x-1)\right]=\ln(x)$

$ln\left(12x^2-10x+2\right)=\ln(x)$

Ce qui équivaut à :

$12x^2-10x+2=x\iff 12x^2-11x+2=0$

Le discriminant est: $\Delta=b^2-4ac=(-11)^2-4\times 12\times 2=25=5^2>0$, deux solutions réelles distinctes:

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{11+5}{24}=\dfrac{16}{24}=\dfrac{2}{3}$, solution convient car $x_1\in\left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$

$x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{11-5}{24}=\dfrac{6}{24}=\dfrac{1}{4}$, solution ne convient pas car $x_2\notin\left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$

L'équation admet une unique solution dans l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$

Affirmation fausse

4) $\left(4z^2-20z+37\right)(2z-7+2i)=0$

$$\begin{cases}4z^2-20z+37=0\\2z-7+2i=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=-192<0,\ z_1=\frac{5}{2}+i\sqrt{3}\ \text{ et } z_2=\frac{5}{2}-i\sqrt{3}\\z_3=\frac{7-2i}{2}=\frac{7}{2}-i\end{cases}$$ (Deux racines complexes conjuguées)

Les solutions sont $\begin{cases}z_1=\frac{5}{2}+i\sqrt{3}\\z_2=\frac{5}{2}-i\sqrt{3}\\z_3=\frac{7}{2}-i\end{cases}$

Vérifions que les solutions appartiennent au cercle de centre P d'affixe 2:
Soit les points A, B et C d'affixes respectives z_1 , z_2 et z_3

$$\mathbf{A\,P}=|2-z_1|=\left|2-\frac{5}{2}-i\sqrt{3}\right|=\left|-\frac{1}{2}-i\sqrt{3}\right|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+3}=\sqrt{\frac{13}{4}}=\frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$\mathbf{B\,P}=|2-z_2|=\left|2-\frac{5}{2}+i\sqrt{3}\right|=\left|-\frac{1}{2}+i\sqrt{3}\right|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+3}=\sqrt{\frac{13}{4}}=\frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$\mathbf{C\,P}=\left|2-\frac{7}{2}+i\right|=\left|-\frac{3}{2}+i\right|=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+1}=\sqrt{\frac{9}{4}+1}=\sqrt{\frac{13}{4}}=\frac{\sqrt{13}}{2}$$

Conclusion: Les points A, B et C appartiennent au cercle de centre P et de rayon $\mathbf{R}=\frac{\sqrt{13}}{2}$

Affirmation vraie

Exercice 3:

Partie A:

1) Pour les melons du maraîcher A, on modélise la masse en gramme par une variable aléatoire $\mathbf{M_A}$ qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[850\ ;x]$, où x es
1200.
Les melons sont qualifiés conformes si leur masse est comprise entre $900\,g$ et $1200\,g$.

$\mathbf{P}\left(900\leqslant\mathbf{M_A}\leqslant1200\right)=\frac{1200-900}{x-850}=\frac{300}{x-850}=0{,}75$ (car $75\ \%$ des melons du maraîcher A sont conformes)

$$\frac{300}{x-850}=0{,}75\Leftrightarrow300=0{,}75\,(x-850)=0{,}75\,x-637{,}5\Leftrightarrow0{,}75\,x=300+637{,}5=937{,}5$$

$$x=\frac{937{,}5}{0{,}75}=1250$$

2) La masse en gramme des melons du maraîcher B est modélisée par une variable aléatoire $\mathbf{M_B}$ qui suit une loi normale de moyenne 1050 et d'écart-type inconn

On pose $\mathbf{Z}=\frac{\mathbf{M_B}-\mu}{\sigma}=\frac{\mathbf{M_B}-1050}{\sigma}$, $\mathbf{Z}$ suit une loi normale réduite centrée $\mathbf{N}\,(0\ ;1)$

$\mathbf{P}\left(900\leqslant\mathbf{M_B}\leqslant1200\right)=0{,}85$ (car $85\ \%$ desmelons du maraîchers B sont conformes)

$$\mathbf{P}\left(900\leqslant\mathbf{M_B}\leqslant1200\right)=0{,}85\Leftrightarrow\mathbf{P}\left(\frac{900-1050}{\sigma}\leqslant\frac{\mathbf{M_B}-1050}{\sigma}\leqslant\frac{1200-1050}{\sigma}\right)=0{,}85$$

$$\mathbf{P}\left(\frac{-150}{\sigma}\leqslant\mathbf{Z}\leqslant\frac{150}{\sigma}\right)=0{,}85\Leftrightarrow1-2\,\mathbf{P}\left(\mathbf{Z}\geqslant\frac{150}{\sigma}\right)=0{,}85\Leftrightarrow2\,\mathbf{P}\left(\mathbf{Z}\geqslant\frac{150}{\sigma}\right)=0{,}15$$

$\Leftrightarrow\mathbf{P}\left(\mathbf{Z}\geqslant\frac{150}{\sigma}\right)=0{,}075$ d'où $\mathbf{P}\left(\mathbf{Z}\leqslant\frac{150}{\sigma}\right)=0{,}925$

A la calculatrice, on trouve:
$\frac{150}{\sigma}\approx1{,}44\Leftrightarrow\sigma\approx104$ (arrondi à l'unité)

3) Le détaillant doute de l'affirmation du maraîcher C.
Il constate que sur 400 melons livrés par ce maraîcher au cours d'une semaine, seulement 294 sont conformes.
Le maraîcher C affirme, quant à lui, que $80\ \%$ des melons de sa production sont conformes.

$n=400\geqslant30$; $n\,p=320\geqslant5$ et $n\,(1-p)=80\geqslant5$: les conditions sont réunies

$$\mathbf{I}=\left[p-1{,}96\times\sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}}\ ;p+1{,}96\times\sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}}\right]=\left[0{,}8-196\times\sqrt{\frac{0{,}8\times0{,}2}{400}}\ ;0{,}8+1{,}96\times\sqrt{\frac{0{,}8\times0{,}2}{400}}\right]$$

$$\mathbf{I}=[0{,}7608\ ;0{,}8392]$$

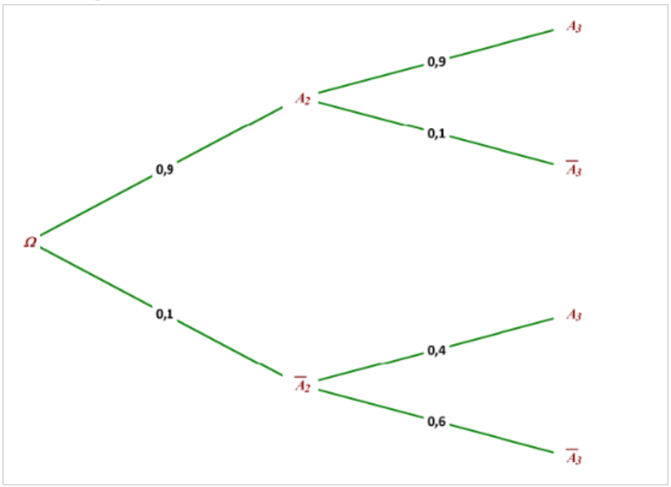
$$f_{obs}=\frac{294}{400}=0{,}735$$

On constate que : $f_{obs}\notin\mathbf{I}$

Conclusion: le détaillant a raison de douter de l'affirmation du maraîcher C.

Partie B:

1)a) Arbre pondéré:



1)b) Formule Probabilités totales:

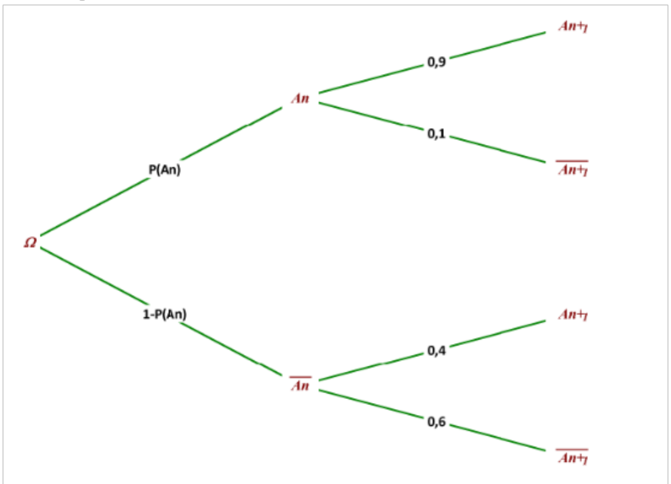
$$\mathbf{P}\left(\mathbf{A}_3\right)=\mathbf{P}\left(\mathbf{A}_2 \cap \mathbf{A}_3\right)+\mathbf{P}\left(\mathbf{A}_3 \cap \bar{\mathbf{A}}_2\right)=\mathbf{P}\left(\mathbf{A}_2\right)\times\mathbf{P}_{\mathbf{A}_2}\left(\mathbf{A}_3\right)+\mathbf{P}\left(\bar{\mathbf{A}}_2\right)\times\mathbf{P}_{\bar{\mathbf{A}}_2}\left(\mathbf{A}_3\right)$$

$$\mathbf{P}\left(\mathbf{A}_3\right)=\mathbf{0{,}9\times0{,}9+0{,}1\times0{,}4=0{,}85}$$

1)c) On calcule: $\mathbf{P}_{\mathbf{A}_3}\left(\mathbf{A}_2\right)=?$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{A}_3}\left(\mathbf{A}_2\right)=\frac{\mathbf{P}\left(\mathbf{A}_2 \cap \mathbf{A}_3\right)}{\mathbf{P}\left(\mathbf{A}_3\right)}=\frac{\mathbf{P}\left(\mathbf{A}_2\right)\times\mathbf{P}_{\mathbf{A}_2}\left(\mathbf{A}_3\right)}{\mathbf{P}\left(\mathbf{A}_3\right)}=\frac{\mathbf{0{,}9\times0{,}9}}{\mathbf{0{,}85}}\approx\mathbf{0{,}95}$$

2) Arbre pondéré:



Formule Probabilités totales:

$$\mathbf{P}\left(\mathbf{A}_{n+1}\right)=\mathbf{P}\left(\mathbf{A}_n \cap \mathbf{A}_{n+1}\right)+\mathbf{P}\left(\mathbf{A}_{n+1} \cap \bar{\mathbf{A}}_n\right)=\mathbf{P}\left(\mathbf{A}_n\right)\times\mathbf{P}_{\mathbf{A}_n}\left(\mathbf{A}_{n+1}\right)+\mathbf{P}\left(\bar{\mathbf{A}}_n\right)\times\mathbf{P}_{\bar{\mathbf{A}}_n}\left(\mathbf{A}_{n+1}\right)$$

$$\mathbf{P}\left(\mathbf{A}_{n+1}\right)=p_n\times\mathbf{0{,}9}+\left(\mathbf{1}-p_n\right)\times\mathbf{0{,}4}=\mathbf{0{,}9}\,p_n+\mathbf{0{,}4}-\mathbf{0{,}4}\,p_n=\mathbf{0{,}5}\,p_n+\mathbf{0{,}4}$$

D'où $p_{n+1}=\mathbf{0{,}5}\,p_n+\mathbf{0{,}4}$

3)a) $n\geqslant\mathbf{1},\ p_n\geqslant\mathbf{0{,}8}$

Par récurrence:

Par hypothèse, $p_1=\mathbf{1}$

- Initialisation: $p_1>\mathbf{0{,}8}$, la propriété est vraie au rang $n=\mathbf{1}$
- Hérédité: on suppose la propriété vraie au rang n et on doit démontrer qu'elle est vraie au rang n+1

$p_n>\mathbf{0{,}8} \iff \mathbf{0{,}5}\,p_n>\mathbf{0{,}5\times0{,}8=0{,}4} \iff \mathbf{0{,}5}\,p_n+\mathbf{0{,}4}>\mathbf{0{,}4+0{,}4=0{,}8}$

$p_{n+1}>\mathbf{0{,}8}$

La propriété est vraie au rang n+1

- Conclusion: Pour tout $n\geqslant\mathbf{1}$, $p_n>\mathbf{0{,}8}$

3)b) $p_{n+1}-p_n=\mathbf{0{,}5}\,p_n+\mathbf{0{,}4}-p_n=-\mathbf{0{,}5}\,p_n+\mathbf{0{,}4}=-\mathbf{0{,}5}\left(p_n-\frac{\mathbf{0{,}4}}{\mathbf{0{,}5}}\right)=-\mathbf{0{,}5}\left(p_n-\mathbf{0{,}8}\right)$

On $p_n>\mathbf{0{,}8}$ donc $p_n-\mathbf{0{,}8}>\mathbf{0}$

Conclusion: $p_{n+1}-p_n=-\mathbf{0{,}5}\left(p_n-\mathbf{0{,}8}\right)<\mathbf{0}$, la suite $\left(p_n\right)$ est décroissante.

3)c) La suite $\left(p_n\right)$ es décroissante et minorée par $\mathbf{0{,}8}$ donc elle est convergente.

4) $n\geqslant\mathbf{1}$ $v_n=p_n-\mathbf{0{,}8}$

$v_{n+1} = p_{n+1} - 0{,}8 = 0{,}5\, p_n + 0{,}4 - 0{,}8 = 0{,}5\, p_n - 0{,}4 = 0{,}5 \left(p_n - \dfrac{0{,}4}{0{,}5} \right)$

$v_{n+1} = 0{,}5 \left(p_n - 0{,}8 \right)$

$v_{n+1} = 0{,}5\, v_n$

La suite $\left(v_n \right)$ est une suite géométrique de raison $q = 0{,}5$ et de premier terme $v_1 = p_1 - 0{,}8 = 0{,}2$

4)b) Expression de v_n en fonction de n: $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 0{,}2 \times (0{,}5)^{n-1}$

Expression de p_n en fonction de n: $v_n = p_n - 0{,}8 \iff p_n = v_n + 0{,}8$

On obtient: $p_n = 0{,}2 \times (0{,}5)^{n-1} + 0{,}8$

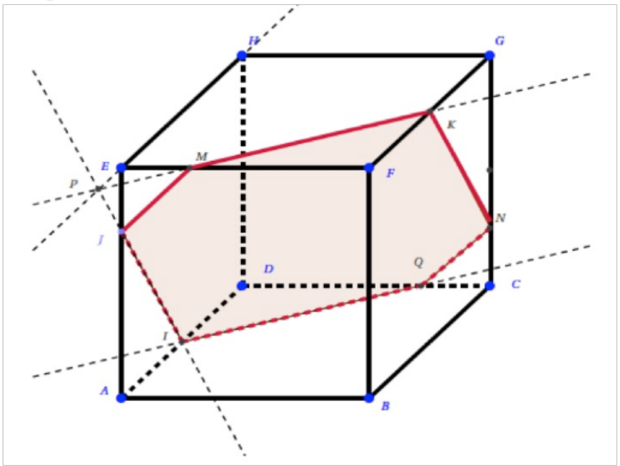
4)c) $p_n = 0{,}8 + 0{,}2 \times (0{,}5)^{n-1}$, on a $0 < q = 0{,}5 < 1$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(0{,}2 \times (0{,}5)^{n-1} \right) = 0$

Conclusion: $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0{,}8$

Exercice 4:

Partie A:

1) Figure:



Le point P est l'intersection de (IJ) et de (EH)

2) L'intersection du plan (IJK) et du plan (EFG) est la droite (PK) puisque :

- Le point P est le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (EH) incluse dans le plan (EFG) ;
- Le point K appartient aussi aux deux plans.

Partie B:

1)a) $I \left(0 \,;\, \dfrac{1}{2} \,;\, 0 \right)$; $J \left(0 \,;\, 0 \,;\, \dfrac{3}{4} \right)$ et $K \left(1 \,;\, \dfrac{1}{2} \,;\, 1 \right)$

1)b) $\vec{n}\,(4 \,;\, a \,;\, b)$ est orthogonal à $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{IJ} = 0 \iff \begin{pmatrix} 4 \\ a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{-1}{2} \\ \dfrac{3}{4} \end{pmatrix} = \dfrac{-1}{2}\, a + \dfrac{3}{4}\, b = 0$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{IK} = 0 \iff \begin{pmatrix} 4 \\ a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 + b = 0 \iff b = -4$$

$\dfrac{-1}{2}\, a + \dfrac{3}{4}\, b = 0$ et $b = -4$ d'où $\dfrac{-1}{2}\, a - 3 = 0$ soit $a = -6$

Conclusion: $\vec{n}\,(4 \,;\, -6 \,;\, -4)$

1)c) Equation cartésienne du plan (IJK) est:

Vecteur normal: $\vec{n}\,(a \,;\, b \,;\, c)$; équation cartésienne: $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$

Donc comme $\vec{n}\,(4 \,;\, -6 \,;\, -4)$ alors l'équation est de la forme: $4\,x - 6\,y - 4\,z + d = 0$

Trouvons d:

$I \in (IJK)$ donc ses coordonnées vérifient cette équation:

$4\,x_I - 6\,y_I - 4\,z_I + d = 0 \iff 4 \times 0 - 6 \times \dfrac{1}{2} - 4 \times 0 + d = 0 \iff -3 + d = 0 \iff d = 3$

Conclusion: Une équation du plan (IJK) est : $4\,x - 6\,y - 4\,z + 3 = 0$

2)a) La droite (CG) passe par le point $C\,(1 \,;\, 1 \,;\, 0)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{CG}\,(0 \,;\, 0 \,;\, 1)$

Une représentation paramétrique de la droite (CG) est: $\begin{cases} x = x_C \\ y = y_C \\ z = z_C + 1\,k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$ d'où $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1\,k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$

2)b) N point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (CG)

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1\,k \\ 4\,x - 6\,y - 4\,z + 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1\,k \\ 4 \times 1 - 6 \times 1 - 4 \times k + 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1\,k \\ 4 - 6 - 4\,k + 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = k \\ k = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Le point N a pour coordonnées:

$N\left(1\ ;1\ ;\ \frac{1}{4}\right)$

2)c) Voir figure **Partie A**

Partie C:

La droite (FR) est orthogonale au plan (IJK) donc le vecteur normal au plan (IJK) est le vecteur directeur de la droite (FR)

Le point $F(1\ ;0\ ;1)$ appartient à (FR)

Représentation paramétrique de la droite (FR) est: $\begin{cases} x=x_F+4t \\ y=y_F-6t \\ z=z_F-4t \end{cases}$, $t\in\mathbf{R}$ d'où $\begin{cases} x=1+4t \\ y=-6t \\ z=1-4t \end{cases}$, $t\in\mathbf{R}$

Cherchons les coordonnées du point R:

$$\begin{cases} x=1+4t \\ y=-6t \\ z=1-4t \\ 4x-6y-4z+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+4t \\ y=-6t \\ z=1-4t \\ 4(1+4t)-6(-6t)-4(1-4t)+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+4t \\ y=-6t \\ z=1-4t \\ 4+16t+36t-4+16t+3=68t+3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1+4t \\ y=-6t \\ z=1-4t \\ t=\frac{-3}{68} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+4\times\left(\frac{-3}{68}\right)=\frac{14}{17} \\ y=-6\times\left(\frac{-3}{68}\right)=\frac{9}{34} \\ z=1-4\times\left(\frac{-3}{68}\right)=\frac{20}{17} \\ t=\frac{-3}{68} \end{cases}$$

R a pour coordonnées: $R\left(\frac{14}{17}\ ;\ \frac{9}{34}\ ;\ \frac{20}{17}\right)$

Vérifions si R est à l'intérieur du cube : $\begin{cases} x_R=\frac{14}{17}<1 \\ y_R=\frac{9}{34}<1 \\ z_R=\frac{20}{17}>1 \end{cases}$

Conclusion: $z_R>1$ donc le point R n'est pas à l'intérieur du cube