# Correction Centres ES 2018

## Exercice 1:

1) $f(x) = e^{-3x} + e^2$

$f'(x) = -3e^{-3x}$ (car $e^2$ est une constante donc sa dérivée est nulle, $e^{-3x}$ forme $e^u$ donc sa dérivée est: $u' e^u$ )

**Réponse C**

2) Le nombre d'objets connectés est passé de 4 milliards en 2010 à 15 milliards en 2017.

Soit t le taux d'évolution annuel moyen:

$$15 = 4\left(1+\frac{t}{100}\right)^7 \Leftrightarrow \frac{15}{4} = \left(1+\frac{t}{100}\right)^7 \Leftrightarrow \left(\frac{15}{4}\right)^{\frac{1}{7}} = 1+\frac{t}{100} \Leftrightarrow \frac{t}{100} = \left(\frac{15}{4}\right)^{\frac{1}{7}} - 1 \approx 0{,}208$$

Donc $t = 20{,}8\ \%$

**Réponse D**

3) X suit une loi normale $\mu = 13$ et $\sigma = 2{,}4$

A la calculatrice on trouve:

$P(X \geqslant 12{,}5) \approx 0{,}58$

**Réponse A**

4) Y suit une loi uniforme sur $[14\ ;\ 16]$

Calculons $P(Y \leqslant 15{,}5) = ?$

$$P(Y \leqslant 15{,}5) = \frac{15{,}5-14}{16-14} = \frac{1{,}5}{2} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

**Réponse B**

## Exercice 2:

1) En journée la masse d'algue augmente de $2\ \%$ et le système de filtration retire $100\ kg$

$a_1 = 1{,}02\ a_0 - 100 = 1{,}02 \times 2000 - 100 = 1940$

$a_2 = 1{,}02\ a_1 - 100 = 1{,}02 \times 1940 - 100 = 1878{,}8$

Après deux jours, la masse d'algues restante est de $1878{,}8\ kg$

2)a) En journée la masse d'algue augmente de $2\ \%$ et le système de filtration retire $100\ kg$

$a_{n+1} = 1{,}02\ a_n - 100$

2)b) $b_n = a_n - 5000$

$b_{n+1} = a_{n+1} - 5000 = (1{,}02\ a_n - 100) - 5000 = 1{,}02\ a_n - 5100$

$$b_{n+1} = 1{,}02\left(a_n - \frac{5100}{1{,}02}\right) = 1{,}02\ (a_n - 5000)$$

$b_{n+1} = 1{,}02\ b_n$

La suite $(b_n)$ est une suite géométrique de raison $q = 1{,}02$ et de premier terme $b_0 = a_0 - 5000 = 2000 - 5000 = -3000$

2)c) Expression de $b_n$ en fonction de n: $b_n = -3000 \times (1{,}02)^n$

Expression de $a_n$ en fonction de n: $b_n = a_n - 5000 \Leftrightarrow a_n = b_n + 5000$

D'où $a_n = -3000 \times (1{,}02)^n + 5000$

2)d) $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = ?$

Comme $q = 1{,}02 > 1$ , $\lim\limits_{n \to +\infty} \left((1{,}02)^n\right) = +\infty$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-3000 \times (1{,}02)^n\right) = -\infty$

Conclusion: $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = -\infty$ , ce qui signifie que la quantité d'algues va être nulle au bout d'un certain nombre de jours.

3)a) Algorithme:

```
N ← 0
A ← 2000
Tant que A > 0

A ← 1,02 × A − 100
        N ← N+1
Fin Tant que
Afficher N
```

3)b) A la calculatrice, on obtient: $n = 26$ car $\begin{cases} u_{25} \approx 78{,}2 > 0 \\ u_{26} \approx -20{,}3 < 0 \end{cases}$

4)a) $a_n = -3000 \times (1{,}02)^n + 5000 \leqslant 0 \Leftrightarrow -3000 \times (1{,}02)^n \leqslant -5000 \Leftrightarrow (1{,}02)^n \geqslant \frac{-5000}{-3000} = \frac{5}{3}$

$ln\left((1{,}02)^n\right) \geqslant \ln\left(\frac{5}{3}\right)$ on ne change pas l'ordre car la fonction "ln" est croissante sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$

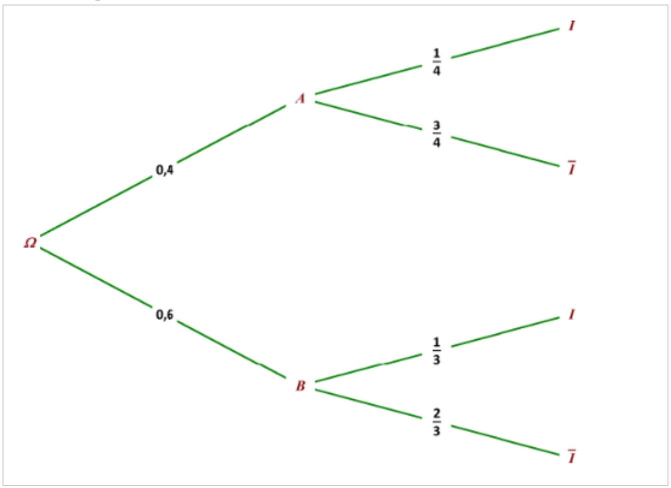
$$n \times \ln(1{,}02) \geqslant \ln\left(\frac{5}{3}\right) \Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{5}{3}\right)}{\ln(1{,}02)}$$ (car $1{,}02 > 1$ donc $ln(1{,}02) > 0$ )

$$\frac{\ln\left(\frac{5}{3}\right)}{\ln(1{,}02)} \approx 25{,}8$$

Conclusion: $n=26$ est le plus petit entier naturel tel que $a_n \leqslant 0$ .
4)b) On retrouve le résultat de la question 3)b)

# Exercice 3:

1)a) Arbre pondéré:




1)b) $\mathbf{P(I)=P(A \cap I)+P(B \cap I)=P(A)\times P_A(I)+P(B)\times P_B(I)}$

$$\mathbf{P(I)=0{,}4\times\frac{1}{4}+0{,}6\times\frac{1}{3}=\frac{1}{10}+\frac{2}{10}=\frac{3}{10}}$$

$\mathbf{P(I)=0{,}3}$

1)c) $\mathbf{P\left(\overline{I}\right)=1-P(I)=0{,}7}$

$$\mathbf{P_{\overline{I}}(A)=\frac{P\left(A\cap\overline{I}\right)}{P\left(\overline{I}\right)}=\frac{P(A)\times P_A\left(\overline{I}\right)}{P\left(\overline{I}\right)}=\frac{0{,}4\times\frac{3}{4}}{0{,}7}\approx 0{,}43}$$

Donc $\mathbf{43\ \%}$ des guirlandes proviennent de l'entreprise A, d'où $\mathbf{57\ \%}$ des guirlandes proviennent de l'entreprise B
Conclusion: L'affirmation est fausse.
2) On sait que la guirlande pouvant être utilisée à l'extérieur ou à l'intérieur est vendue 5 euros, celle pouvant être utilisée qu'à l'intérieur est vendu 3 euros:

Le prix moyen d'une guirlande est: $\mathbf{p=P(I)\times 3+P\left(\overline{I}\right)\times 5=0{,}3\times 3+0{,}7\times 5=4{,}4}$
Le prix moyen d'une guirlande est de $\mathbf{4{,}40}$ euros.
3) On appelle $\mathbf{X}$ la variable aléatoire comptant le nombre de guirlandes défectueuses.
On effectue $\mathbf{50}$ tirages aléatoires, identiques et indépendants.
Chaque tirage possède deux issues :
- La guirlande est défectueuse et $\mathbf{p=P(D)=0{,}02}$
- La guirlande n'est pas défectueuse et $\mathbf{q=1-p=1-0{,}02=0{,}98}$

La variable aléatoire $\mathbf{X}$ suit donc la loi binomiale de paramètres $\mathbf{n=50}$ et $\mathbf{p=0{,}02}$
Au moins une guirlande est défectueuse: l'événement contraire est aucune guirlande n'est défectueuse:

$$\mathbf{P(X=0)=\binom{50}{0}p^0(1-p)^{50}=0{,}98^{50}\approx 0{,}364}$$

$$\mathbf{P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)\approx 1-0{,}364\approx 0{,}636}$$

4) Intervalle de confiance:

$$\mathbf{I}=\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}}\ ;f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

L'amplitude de cet intervalle est: $\left(f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\left(f-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\frac{2}{\sqrt{n}}$

L'amplitude de cet intervalle est inférieure à $\mathbf{8\ \%}$ : soit $\frac{2}{\sqrt{n}}\leqslant \mathbf{0{,}08} \Leftrightarrow \frac{2}{\mathbf{0{,}08}}\leqslant\sqrt{n} \Leftrightarrow \mathbf{25}\leqslant\sqrt{n}$

Donc $\mathbf{n\geqslant 625}$ , l'entreprise doit interroger au minimum $\mathbf{625}$ clients.

# Exercice 4:

## Partie A: Etude graphique

1) Par lecture graphique, on a: $\mathbf{f(x)=3000}$ ce qui correspond à $\mathbf{x=6{,}8}$

2) Valeur approchée de $\int_2^8 \mathbf{f(x)}\ dx$ , f est continue et positive sur l'intervalle $[\mathbf{2\ ;\ 8}]$ c'est l'aire entre la courbe $\mathbf{C}_f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation $\mathbf{x=2}$ et $\mathbf{x=8}$

Graphiquement, on trouve: $\int_2^8 \mathbf{f(x)}\ dx\approx\mathbf{22000}$ unitté d'aire

(on compte environ 11 carreaux et on multiplie par $\mathbf{1000\times 2=2000}$ car 1 unité = 2 en abscisse et 1 unité = 1000 en ordonnée)

## Partie B: Etude théorique

1) f est la fonction dérivable et définie sur l'intervalle $\mathbf{I=[0\ ;\ 20]}$

$\mathbf{f(x)=1000(x+5)}\ e^{-0{,}2x}$

$\mathbf{f'}(x) = 1000\left[1 \times e^{-0,2x} + (x+5) \times \left(-0,2 \times e^{-0,2x}\right)\right] = 1000\left(-0,2\, e^{-0,2x} + \cancel{\left(e^{-0,2x} - e^{-0,2x}\right)}\right)$

$\mathbf{f'}(x) = -200\, e^{-0,2x}$

2) $\mathbf{f'}(x) = -200\, e^{-0,2x} < 0$ (car $e^{-0,2x} > 0$ )

Tableau de variations:

| $x$ | 0      20 |
|---|---|
| $\mathbf{f'}(x)$ | $-$ |
| $\mathbf{f}(x)$ | $f(0) \searrow f(20)$ |

$\begin{cases} \mathbf{f}(0) = 1000 \times 5 = 5000 \\ \mathbf{f}(20) = 1000 \times 25 \times e^{-0,2 \times 20} = 457,891 \end{cases}$

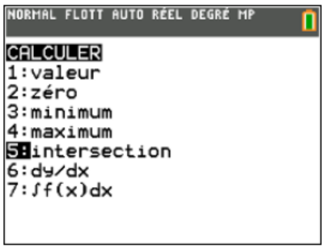
3) La fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $\mathbf{I} = [0 ; 20]$

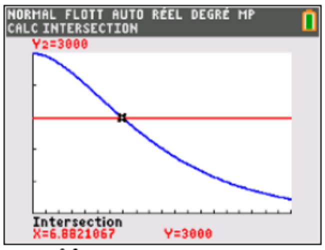
On sait que : $\begin{cases} \mathbf{f}(0) = 1000 \times 5 = 5000 \\ \mathbf{f}(20) = 1000 \times 25 \times e^{-0,2 \times 20} \approx 458 \end{cases}$ (on arrondi à l'unité)

Or on a : $458 \leqslant 3000 \leqslant 5000$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation $\mathbf{f}(x) = 3000$ admet une unique solution $\alpha \in [0 ; 20]$ tel que $\mathbf{f}(\alpha) = 3000$

A la calculatrice on obtient:




$\alpha \approx 6,88$ à $10^{-2}$ près

4) On admet que: $\mathbf{F}(x) = -5000\,(x+10)\, e^{-0,2x}$

$\int_2^{?,?} \mathbf{f}(x)\, dx = [\mathbf{F}(x)]_2^8 = \mathbf{F}(8) - \mathbf{F}(2) = -5000 \times \left[18\, e^{-0,2 \times 8} - 12\, e^{-0,2 \times 2}\right] = 22048,52$

$\int_2^{?,?} \mathbf{f}(x)\, dx \approx 22049$ arrondi à l'unité .

## Partie C: Application numérique

1) D'après la question 3 partie B, la demande est supérieure à $3000$ objets lorsque le prix unitaire est inférieur à $6,88$ euros.

2) La valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[2 ; 8]$ est:

$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b \mathbf{f}(x)\, dx = \frac{1}{8-2} \int_2^8 \mathbf{f}(x)\, dx \approx \frac{1}{6} \times 22049 \approx 3675$ (arrondi à l'unité)

Si lorsque le prix varie unitaire varie entre 2 euros à 8 euros alors la demande moyenne est d'environ $3675$ objets.