Correction Amérique du Nord S 2018

Exercice 1:

Partie A: Démonstration préliminaire

1) La fonction G est dérivable sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle.

$\mathbf{G}(t)=(-t-5)\,e^{-0,2t}$ (forme $u\times v$ donc la dérivée : $u'\times v+u\times v'$ et $\left(e^{u}\right)'=u'\,e^{u}$)

$\mathbf{G}'(t)=-e^{-0,2t}+(-t-5)\times\left(-0,2\,e^{-0,2t}\right)=\cancel{-e^{-0,2t}}+0,2\,te^{-0,2t}+\cancel{e^{-0,2t}}=0,2\,te^{-0,2t}=\mathrm{g}(t)$

La fonction G est bien une primitive de la fonction g sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$.

2) Pour tout réel x positif:

$\int_0^x \mathrm{g}(t)\ dt=[\,\mathbf{G}(t)\,]_0^x=\mathbf{G}(x)-\mathbf{G}(0)=(-x-5)\,e^{-0,2x}+5$

Partie B: Etude de la durée de présenced'un client dans le supermarché

Une étude commandée par le gérant du supermarché permet de modéliser la durée, exprimée en minutes, passée dans le supermarché par un client choisi au hasard par une variable aléatoire T.

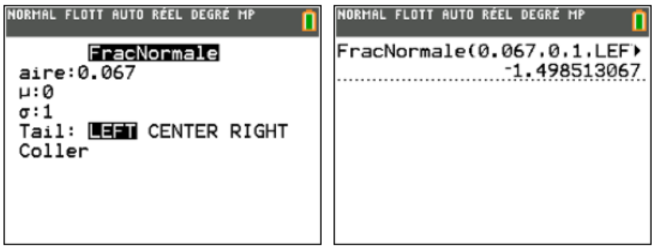
Cette variable T suit une loi normale d'espérance 40minutes et d'écart type un réel positif noté σ.

On estime que: $\mathbf{P}\left(\mathbf{T}<10\right)=0,067$

1) $\mathbf{Z}=\dfrac{\mathbf{T}-40}{\sigma}$ donc $\mathbf{Z}$ suit une loi normale centrée réduite $\mathbf{N}\,(0,1)$

$\mathbf{P}\left(\mathbf{T}<10\right)=0,067 \iff \mathbf{P}\left(\dfrac{\mathbf{T}-40}{\sigma}<\dfrac{10-40}{\sigma}\right)=0,067 \iff \mathbf{P}\left(\mathbf{Z}<\dfrac{-30}{\sigma}\right)=0,067$

A la calculatrice:



$\dfrac{-30}{\sigma}\approx-1,498 \iff \sigma\approx 20,03$ soit 20 min $2\ s$

2) $\sigma=20$ on doit calculer $\mathbf{P}\left(\mathbf{T}>60\right)=?$

$\mathbf{P}\left(\mathbf{T}>60\right)\approx 0,158$

A la calculatrice, on obtient:

Environ $15,8\ \%$ des clients passent plus d'une heure dans le supermarché.

Partie C: Durée d'attente pour le paiement

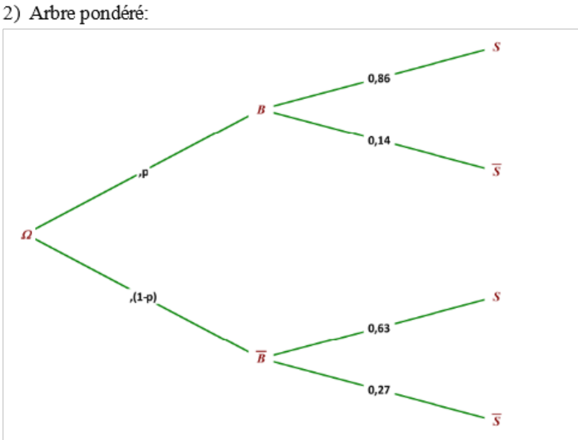
1)a) $\mathbf{E}\,(\mathbf{X})=\dfrac{1}{\lambda}=\dfrac{1}{0,2}=5$

En moyenne un client attend 5 minutes à une borne automatique.

1)b) $\mathbf{P}\left(\mathbf{T}>10\right)=e^{-10\lambda}=e^{-0,2\times 10}=\dfrac{1}{e^2}\approx 0,135$

La probabilité que la durée d'attente d'un client à une borne automatique de paiement soit supérieure à 10 minutes est environ égal à $0,135$.

2) Arbre pondéré:



Probabiltés totales:
On veut calculer : $\mathbf{P\,(S) > 0{,}75}$

$$\mathbf{P\,(S) > 0{,}75 \quad \text{avec} \quad P\,(S) = P\,(S \cap B) + P\left(S \cap B^{-}\right) = P\,(B) \times P_{B}\,(S) + P\left(B^{-}\right) \times P_{B^{-}}\,(S)}$$

Donc $\mathbf{P\,(B) \times P_{B}\,(S) + P\left(B^{-}\right) \times P_{B^{-}}\,(S) > 0{,}75 \;\Leftrightarrow\; 0{,}86\,p + 0{,}63\,(1-p) > 0{,}75}$

$$\mathbf{\Leftrightarrow\; 0{,}86\,p - 0{,}63\,p > 0{,}75 - 0 \times ?{,}63 \;\Leftrightarrow\; 0{,}23\,p > 0{,}12 \;\Leftrightarrow\; p > \frac{0{,}12}{0{,}23}}$$

D'où $\mathbf{p > \frac{12}{23}}$

Ce qui signifie que la proportion minimale de clients qui doivent choisir une borne automatique de paiement pour que cet objectif soit atteint est donc de $\mathbf{52\ \%}$ $\mathbf{\left(\frac{12}{23} \approx 0{,}52\right)}$

Partie D: Bons d'achat

1) Le client effectue des achats pour un montant de 158,02 euros, il reçoit donc 15 cartes.
On effectue 15 tirages aléatoire, indépendants et identiques.
Chaque tirage a deux issues possibles (c'est donc une épreuve de Bernoulli) :
- succès de probabilité $\mathbf{p = 0{,}005}$ (carte est gagnante);
- échec de probabilité $\mathbf{1 - p = 0{,}995}$.

On appelle la variable aléatoire $\mathbf{S}$ qui est égale au nombre de succès au cours de ces $\mathbf{n = 15}$ épreuves indépendantes de Bernoulli de paramètre $\mathbf{p = 0{,}005}$,
$\mathbf{S}$ suit une loi binomiale de paramètres $\mathbf{n = 15}$ et $\mathbf{p = 0{,}005}$.
La probabilité que le client obtienne au moins une carte gagnante est:
L'événement contraire est : le client n'obtient aucune carte gagnante et on a: $\mathbf{P\left(S = 0\right) = \binom{15}{0}\, p^{0} \times (1-p)^{15-0} = 0{,}995^{15}}$

Donc $\mathbf{P\left(S \geqslant 1\right) = 1 - P\left(S = 0\right) \approx 0{,}07}$
2) On souhaite trouver n tel que: $\mathbf{P\left(S \geqslant 1\right) \geqslant 0{,}50}$
Ce qui correspond à : $\mathbf{1 - 0{,}995^{n} \geqslant 0{,}5}$
La fonction "ln" est croissante sur l'intervalle $\mathbf{]\,0\ ;\ +\infty\,[}$, l'ordre est inchangé
d'où $\mathbf{\ln\ 0{,}995^{n} \leqslant \ln\ 0{,}5 \;\Leftrightarrow\; n \ln\ 0{,}995 \leqslant \ln\ 0{,}5 \;\Leftrightarrow\; n \geqslant \frac{\ln\ 0{,}5}{\ln\ 0{,}995}}$ car $\mathbf{0{,}995 < 1}$ d'où $\mathbf{\ln\ 0{,}995 < \ln\ 1 = 0}$

$\mathbf{\frac{\ln\ 0{,}5}{\ln\ 0{,}995} \approx 138{,}28}$
Conclusion: $\mathbf{n = 139}$, 139 cartes , le montant des achats doit étre supérieur ou égal à $\mathbf{1390}$ euros

Exercice 2:

1) La fonction f est dérivable sur l'intervalle $\mathbf{[\,0\ ;\ 1\,[}$.
Onnote $\boldsymbol{f'}$ sa fonction dérivée.
On admet que la fonction $\boldsymbol{f}$ possède un maximum sur l'intervalle $\mathbf{[\,0\ ;\ 1\,[}$ et que $\mathbf{f\,'(x) = \frac{-b\,x + b - 2}{1 - x}}$

$\boldsymbol{f}$ admet un maximum alors $\mathbf{f\,'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{-b\,x + b - 2}{1 - x} = 0 \;\Leftrightarrow\; -b\,x + b - 2 = 0}$

$$\mathbf{\Leftrightarrow\; -b\,x = -b + 2 \;\Leftrightarrow\; b\,x = b - 2 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{b-2}{b}}$$

Soit $\mathbf{x = 1 - \frac{2}{b}}$

Calculons $\mathbf{f\left(1 - \frac{2}{b}\right) = ?}$

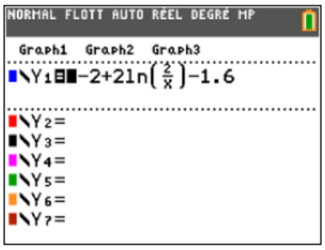
$$\mathbf{f\left(1 - \frac{2}{b}\right) = b\left(1 - \frac{2}{b}\right) + 2\ \ln\left(1 - 1 + \frac{2}{b}\right) = b - 2 + 2\ \ln\left(\frac{2}{b}\right)}$$

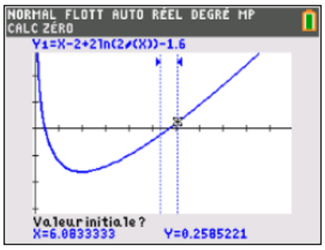
2) Cherchons b pour que la hauteur maximale du projectile ne dépasse pas 1,6 mètre
On pose $\mathbf{h\,(b) = f\,(b) - 1{,}6 = b - 3{,}6 + 2\ \ln\left(\frac{2}{b}\right) = b - 3{,}6 + 2\ \ln\ 2 - 2\ \ln\ b = b\left(1 - 2\ \frac{\ln\ b}{b}\right) - 3{,}6 - 2\ \ln\ 2}$, $\mathbf{b \geqslant 2}$
La fonction $\boldsymbol{h}$ est dérivable sur $\mathbf{[\,2\ ;\ +\infty\,[}$
$\mathbf{h\,'(b) = 1 - 2 \times \frac{1}{b} = \frac{b-2}{b}}$ comme $\mathbf{b > 0}$ et $\mathbf{b - 2 \geqslant 0}$
on a $\mathbf{h\,'(b) \geqslant 0}$, donc la fonction $\boldsymbol{h}$ est croissante
Tableau de variations:

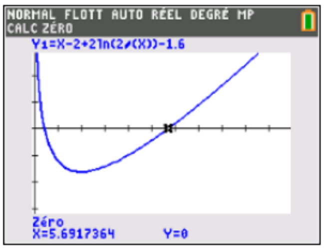
x	2		α		$+\infty$
$h'(b)$	0	$+$		$+$	
$h(b)$	$-1{,}6$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$$\mathbf{\begin{cases} h\,(2) = 2 - 3{,}6 + 2\ \ln\ 2 - 2\ \ln\ 2 = -1{,}6 < 0 \\ \lim\limits_{b \to +\infty} h\,(b) = +\infty \quad \text{avec} \quad \lim\limits_{b \to +\infty} \frac{\ln\ b}{b} = 0 \ \text{et} \ \lim\limits_{b \to +\infty} \left(1 - \frac{\ln\ b}{b}\right) = 1 \end{cases}}$$

La fonction $\boldsymbol{h}$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbf{[\,2\ ;\ +\infty\,[}$
$\mathbf{0 \in [\,-1{,}6\ ;\ +\infty\,[}$
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires il existe un unique $\mathbf{\alpha \in [\,2\ ;\ +\infty\,[}$ tel que $\mathbf{h\,(\alpha) = 0}$
A la calculatrice, on trouve: TI83CE, on utilise 2nde trace puis 2:zéro







$\alpha \approx 5{,}69$

Conclusion: si $b \in [2\,;\alpha[$ alors $\mathbf{h}(b)<0$ donc $\mathbf{f}(b)<1{,}6$

3) Equation de la tangente au point d'abscisse $a=0$

$y=\mathbf{f}'(0)\ (x-0)+\mathbf{f}(0)$ le coefficient directeur est $\mathbf{f}'(0)$ et vaut: $\mathbf{f}'(0)=b-2=5{,}69-2=3{,}69$

$\mathbf{f}'(0)=3{,}69=\dfrac{3{,}69}{1}$

Le vecteur directeur $\vec{u}$ a pour coordonnées: $\vec{u}\,(1\,;3{,}69)$

$\tan\ \theta=\dfrac{opposé}{adjacent}=\dfrac{3{,}69}{1}$ donc $\theta \approx 74{,}8\,°$

Exercice 3:

1)a) Un vecteur directeur de la droite (AB) est : $\overrightarrow{AB}\,(10\,;-8\,;2)$

Un vecteur directeur de la droite (CD) est : $\overrightarrow{CD}\,(15\,;12\,;3)$

Représentation paramétrique de (AB) :	Représentation paramétrique de (CD) :
$\begin{cases} x=10\,k \\ y=-8\,k\ ,\ k\in\mathbf{R} \\ z=2\,k \end{cases}$ $A\,(0{,}0\,,0)$	$\begin{cases} x=-1+15\,k' \\ y=-8+12\,k'\ ,\ k'\in\mathbf{R} \\ z=5+3\,k' \end{cases}$ $C\,(-1\,;-8\,;5)$

1)b) Les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles, en effet les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas proportionnelles.

Les droites (AB) et (CD) ne sont pas sécantes, car:

$$\begin{cases} 10\,k=-1+15\,k' \\ -8\,k=-8+12\,k' \\ 2\,k=5+3\,k' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15\,k'-10\,k=1\ (1) \\ 12\,k'+8\,k=8\ (2) \\ 3\,k'-2\,k=-5\ (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15\,k'-10\,k=1\ (1) \\ 12\,k'+8\,k=8\ (2) \\ 15\,k'-10\,k=-25\ \left(5\times(3)\right) \end{cases}$$

Les lignes (1) et (3) n'ont pas de solution

Conclusion: les droites ne sont pas sécantes (pas de point d'intersection)

Les droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires.

2)a) On considère le point I de la droite (AB) d'abscisse 5 et le point J de la droite (CD) d'abscisse 4.

$I\in(AB)$ donc $5=10\,k$ soit $k=\dfrac{1}{2}$

Les coordonnées de I sont: $I\,(5\,;-4\,;1)$

$|J\in(CD)|$ donc $4=-1+15\,k'$ soit $15\,k'=5$ donc $k'=\dfrac{1}{3}$

Les coordonnées de J sont: $J\,(4\,;-4\,;6)$

Distance $IJ=?$

$IJ=\sqrt{\left(x_J-x_I\right)^2+\left(y_J-y_I\right)^2+\left(z_J-z_I\right)^2}=\sqrt{(-1)^2+(0)^2+(5)^2}=\sqrt{1+25}=\sqrt{26}$

2)b) $\overrightarrow{IJ}\,(-1\,;0\,;5)$

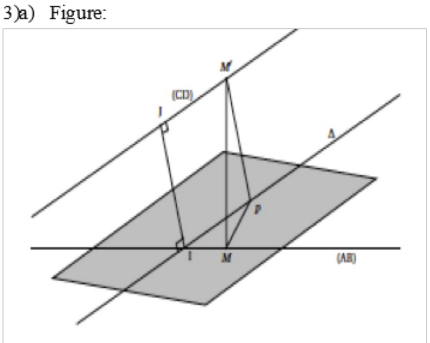
$\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{AB}=(-1)\times10+0\times(-8)+5\times2=-10+10=0$

$\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{CD}=(-1)\times15+0\times(12)+5\times3=-15+15=0$

La droite (IJ) est orthogonale à la droite (AB) , de plus $I\in(AB)$ alors les droites (IJ) et (AB) sont perpendiculaires en I.

La droite (IJ) est orthogonale à la droite (CD) , de plus $J\in(CD)$ alors les droites (IJ) et (CD) sont perpendiculaires en J.

3)a) Figure:



La droite Δ est parallèle à (CD) et passe par le point I, elle est donc incluse dans le plan (IJM') .

Ce dernier étant bien défini puisque M' n'appartient pas à (IJ) .

Dans ce plan (IJM') , la droite Δ est perpendiculaire à (IJ) et donc aussi à la parallèle à (IJ) passant par M'.

Conclusion : la parallèle à la droite (IJ) passant par le point M′ coupe la droite Δ en un point que l'on notera P.

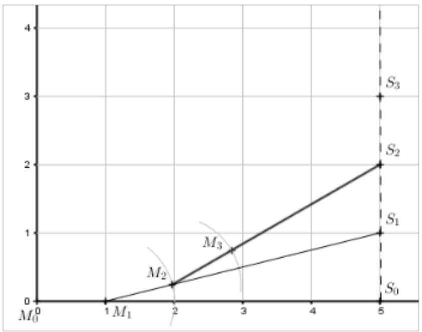
3)b) Les droites (IJ) et $(M'P)$ sont parallèles donc leurs vecteurs directeurs (on prend $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{M'P}$) sont colinéaires.

$\overrightarrow{IJ}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{CD}$ par conséquent $\overrightarrow{M'P}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{CD}$
Les droites Δ et (AB) sont sécantes en I: elles définissent le plan (IMP) .
La droite Δ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{IP}$ et Δ est parallèle à (CD) donc le vecteur $\overrightarrow{M'P}$ orthogonal à $\overrightarrow{CD}$ est orthogonal à $\overrightarrow{IP}$.
$\overrightarrow{M'P}$ est donc orthogonale à deux vecteurs non colinéaires du plan (IMP) , il l'est donc à tout vecteur de ce plan et en particulier à $\overrightarrow{MP}$.
Conclusion : le triangle MPM' est rectangle en P.
3)c) Dans un triangle rectangle, la longueur de l'hypoténuse est plus grande que la longueur des deux côtés de l'angle droit.
Donc $MM' > M'P$ avec $M'P = IJ$
Conclusion: $MM' > IJ$
La distance IJ est la distance minimale entre les droites (AB) et (CD) .

Exercice 4:

Partie A: Modélisation à l'aide d'une suite

1) Graphique 1: Construction des points M_2 et M_3 :



2) On a $d_n = M_n S_n$, calcul de d_0 et d_1 :
$d_0 = M_0 S_0 = 5$
$d_1 = M_1 S_1 = \sqrt{1^2+4^2} = \sqrt{17}$ (triangle $M_1 S_0 S_1$ rectangle en S_0 , Théorème de Pythagore: $M_1 S_0^2 + S_0 S_1^2 = M_1 S_1^2$)
3) M_2 appartient à la droite $M_1 S_1$ et au cercle de centre M_1 et de rayon $R=1$
Equation cercle: $(x-1)^2+(y-0)^2 = x^2+y^2 = 1$
Equation droite $M_1 S_1$: forme $y = ax+b$

$M_1 \in M_1 S_1$ et $S_1 \in M_1 S_1$ on obtient le système suivant: $\begin{cases} y_{M_1} = a x_{M_1} + b \\ y_{S_1} = a x_{S_1} + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = a+b \\ 1 = 5a+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ 1 = 5a - a = 4a \end{cases}$

d'où $\begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = -\frac{1}{4} \end{cases}$, l'équation de la droite $M_1 S_1$ est: $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$

Comme M_2 est le point d'intersection de la droite et du cercle, on a:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \\ (x-1)^2 + \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\right)^2 = x^2-2x+1+\frac{1}{16}(x-1)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \\ x^2-2x+1+\frac{1}{16}x^2 - \frac{2}{16}x + \frac{1}{16} = 1 \end{cases}$$

$$? \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \\ \frac{17}{16}x^2 - \frac{34}{16}x + \frac{1}{16} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \\ 17x^2 - 34x + 1 = 0 \end{cases}$$

$17x^2 - 34x + 1 = 0$ avec $\Delta = b^2 - 4ac = 1088 > 0$ donc $x_1 = \frac{17+4\sqrt{17}}{17} = 1 + \frac{4}{\sqrt{17}} > 1$ et

$x_2 = \frac{17-4\sqrt{17}}{17} = 1 - \frac{4}{\sqrt{17}} < 1$ ne convient pas

L'abscisse de M_2 : $x = 1 + \frac{4}{\sqrt{17}}$

L'ordonnée de M_2 : $y = \frac{1}{4}\left(1+\frac{4}{\sqrt{17}}\right) - \frac{1}{4} = \frac{1}{\sqrt{17}}$

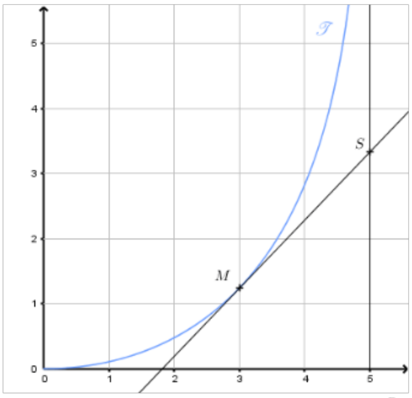
Conclusion: Les coordonnées de M_2 : $M_2\left(1+\frac{4}{\sqrt{17}} ; \frac{1}{\sqrt{17}}\right)$

4)a) En $C5$ on écrit: $=C4+(A4-C4)/F4$
En $F5$ on écrit: $=racine\left((D5-B5)^2+(E5-C5)^2\right)$
4)b) La suite (d_n) est strictement décroissante (admis) et minorée par 0 puisque c'est une distance.
Donc elle est convergente.
d'après le tableau, on conjecture que sa limite est 2,7731658

Partie B: Modélisation à l'aide d'une fonction

1)a) Graphique 2:

Graphiquement on lit les coordonnées du point S: $\mathbf{S\ (5\ ;\ 3{,}4)}$



1)b) La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[\mathbf{0\ ;\ 5}[$ et on admet que:

$$\mathbf{f}'(x) = \frac{x(1-0{,}1\,x)}{5-x}$$

Equation de la tangente au point d'abscisse $a=3$

$$y = \mathbf{f}'(3)\ (x-3) + \mathbf{f}(3)$$

avec $\begin{cases} \mathbf{f}(3) = -2{,}5\ \ln(1-0{,}2\times 3) - 0{,}5\times 3 + 0{,}05\times 9 = -2{,}5\ \ln(0{,}4) - 1{,}5 + 0{,}45 \\ \mathbf{f}'(3) = \dfrac{3(1-0{,}1\times 3)}{5-3} = \dfrac{3-0{,}9}{2} = \dfrac{2{,}1}{2} = 1{,}05 \end{cases}$

d'où $\begin{cases} \mathbf{f}(3) = -2{,}5\ \ln(0{,}4) - 1{,}05 \\ \mathbf{f}'(3) = 1{,}05 \end{cases}$

L'équation de la tangente est donc:

$y = 1{,}05\,(x-3) - 2{,}5\ \ln(0{,}4) - 1{,}05 \iff y = 1{,}05\,x - 3{,}15 - 2{,}5\ \ln(0{,}4) - 1{,}05$

$\iff y = 1{,}05\,x - 2{,}5\ \ln(0{,}4) - 4{,}2$

Le point S appartient à la tangente, le point S ayant pour abscisse $x=5$ son ordonnée est:

$y_S = 1{,}05\,x_S - 2{,}5\ \ln(0{,}4) - 4{,}2 = 1{,}05\times 5 - 2{,}5\ \ln(0{,}4) - 4{,}2 \approx 3{,}34$

2) $x \in [0\ ;\ 5[\quad d(x) = 0{,}1\,x^2 - x + 5$

On calcule $\lim\limits_{x\to 5} d(x) = ?$

$$\lim_{x\to 5} d(x) = 0{,}1\times 25 - 5 + 5 = \frac{25}{10} = 2{,}5$$

Conclusion: La distance $\mathbf{MS}$ se rapproche de $\mathbf{2{,}5}$