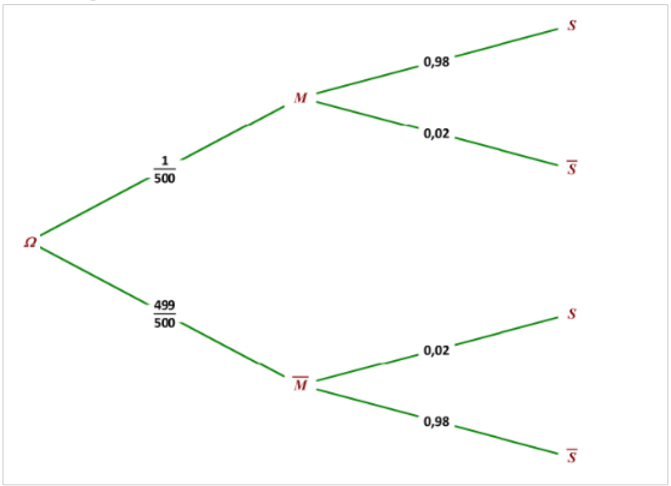
Correction: Sujet ES Liban 2018

Exercice 1:

1)a) On a: $P(M) = \dfrac{1}{500}$, $P_M(S) = 0{,}98$ et $P_{\overline{M}}\left(\overline{S}\right) = 0{,}98$

1)b) Arbre pondéré:



1)c) $P(S) = P(M \cap S) + P\left(\overline{S} \cap M\right) = P(M) \times P_M(S) + P\left(\overline{M}\right) \times P_{\overline{M}}(S)$

$P(S) = \dfrac{1}{500} \times 0{,}98 + \dfrac{499}{500} \times 0{,}02 = 0{,}38$

D'où $P(S) = 0{,}02192$

1)d) On calcule: $P_S(M) = \dfrac{P(M \cap S)}{P(S)} = \dfrac{\dfrac{1}{500} \times 0{,}98}{0{,}02192} \approx 0{,}089$

La probabilité qu'un voyageur porte un objet métallique sachant qu'il a fait sonner le portique est de 0,089, peu importante .
Il y a peu de chance qu'il porte un objet métallique.

2)a) On répète 80 fois la même expérience, les tirages sont identiques et indépendants.

Chaque expérience a deux issues, échec $\left(\overline{S}\right)$ ou réussite (S) , avec $P(S) = 0{,}02192$.
La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 80$ et $p = 0{,}02192$.

2)b) $E(X) = n \times p = 80 \times 0{,}02192 \approx 1{,}7536$
Conclusion: en moyenne, $1{,}7$ personnes vont faire sonner le portique.

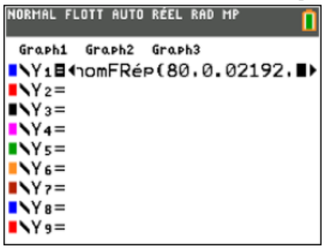
2)c) La probabilité qu'au moins une personne du groupe fasse sonner le portique

Evénement contraire: personne ne fait sonner le portique: $P(X = 0) = \dbinom{80}{0} p^0 \times (1-p)^{80} \approx 0{,}170$

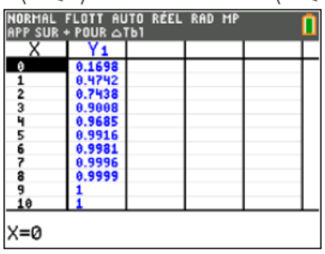
Donc $P(X \geqslant 1) + P(X = 0) = 1 \Leftrightarrow P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0)$
soit $P(X \geqslant 1) \approx 1 - 0{,}170 \approx 0{,}830$.

D'après la calculatrice, la probabilité qu'au maximum 5 personnes fassent sonner le portique:
On calcule $P(X \leqslant 5) \approx 0{,}992$

2)d) Avec la calculatrice: (binomFRép(80,0,02192,X)



Avec la table on obtient les résultats souhaités:
$P(X \leqslant 2) \approx 0{,}7438 < 0{,}9$ et $P(X \leqslant 3) \approx 0{,}9008 > 0{,}9$



X	Y1
0	0.1698
1	0.4742
2	0.7438
3	0.9008
4	0.9685
5	0.9916
6	0.9981
7	0.9996
8	0.9999
9	1
10	1

X=0

Conclusion: 3 est le plus petit entier naturel tel que: $P(X \leqslant n) \geqslant 0{,}9$

Exercice 2:

1)a) Dépense de Maya: $20 \times \frac{1}{4} = 5$, elle dépnse 5 euros

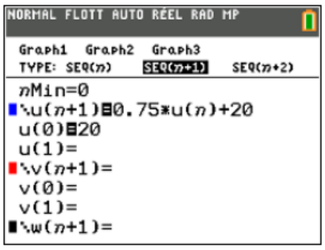
A la fin du mois, il lui reste 15 euros.

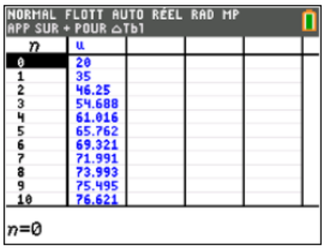
Comme elle ajoute 20 euros supplémentaires, elle aura donc dans sa tirelire 35 euros ($15+20=35$)

1)b) $u_0 = 20$ et $u_1 = 35$

$u_2 = u_1 - \frac{1}{4} \times u_1 + 20 = \frac{3}{4} \times u_1 + 20 = \frac{3}{4} \times 35 + 20 = 46{,}25$

2)a) A la calculatrice, on a:





Valeur de N	0	1	2	3	4	5	6	7
Valeur de U	20	35	46,25	54,688	61,016	65,762	69,321	71,991
Condition: $U < 70$	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux

2)b) A la fin de l'algorithme, on trouve $n = 7$; ce qui signiife que Maya aura plus de 70 euros à partir du $7^{ième}$ mois dans sa tirelire.

3)a) $v_n = u_n - 80$

$v_{n+1} = u_{n+1} - 80 = 0{,}75\ u_n + 20 - 80 = 0{,}75\ u_n - 60 = 0{,}75 \left(u_n - \frac{60}{0{,}75} \right) = 0{,}75 \left(u_n - 80 \right)$

D'où $v_{n+1} = 0{,}75\ v_n$

La suite $\left(v_n \right)$ est géométrique de raison $q = 0{,}75$

3)b) Le premier terme: $v_0 = u_0 - 80 = 20 - 80 = -60$

3)c) Expression de v_n en fonction de n:

$v_n = v_0 \times q^n = -60 \times 0{,}75^n$

Comme $v_n = u_n - 80$, on obtient $u_n = v_n + 80$

Soit $u_n = 80 - 60 \times 0{,}75^n$

3)d) Au 1^{er} juin 2019, $n = 12$ donc $u_{12} \approx 78{,}099$

Donc Maya aura $78{,}10$ euros.

3)e) $v_n = -60 \times 0{,}75^n$ avec $0 < q < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$

Conclusion: $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$

3)f) $u_n = 80 - 60 \times 0{,}75^n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 80$

Ce qui signifie qu'au bout d'un grand nombre de mois, Maya aura dans sa tirelire 80 euros.

Exercice 3:

1) $f'(4)$ représente le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse $a = 4$

Elle passe par les points A et B de coordonnées respectives: $A\ (4{,}2)$ et $B\ (-2,\ -1)$

$f'(4) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1-2}{-2-4} = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}$

Réponse C

2) f est convexe sur l'intervalle $[2\ ;\ 5]$ car la courbe C_f est au-dessus de ses tangentes.

Une fonction dérivable sur un intervalle I est convexe sur I lorsque sa courbe est située au-dessus de chacune de ses tangentes.

Réponse D

3) Valleur moyenne de f sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$

$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\ dx = \frac{1}{5} \int_0^5 f(x)\ dx$

Sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$ la fonction est positive et $\int_0^5 f(x)\ dx$ représente l'aire compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 5$

On compte le nombre de carreaux: on en compte 13 complets et 17 complets et incomplets

Donc $13 \leqslant \int_0^5 f(x)\ dx \leqslant 17$ d'où $\frac{13}{5} \leqslant \mu = \frac{1}{5} \int_0^5 f(x)\ dx \leqslant \frac{17}{5}$

Conclusion: $\mu \approx 2{,}9$ (car $\frac{13}{5} = 2{,}6$ et $\frac{17}{5} = 3{,}4$)

Réponse C

4) X suit une loi normale telle que $P\left(X \leqslant 649\right) \approx 0{,}1587$ et graphiquement on lit: $\mu = 650$

$P\left(X \leqslant 649\right) \approx 0{,}1587$ et par symétrie on a: $P\left(X \geqslant 651\right) \approx 0{,}1587$

$P\left(X \leqslant 649\right) + P\left(649 \leqslant X \leqslant 651\right) + P\left(X \geqslant 651\right) = 1$ d'où $? = 1 - 2 \times P\left(X \leqslant 649\right)$

$P\left(649 \leqslant X \leqslant 651\right) = 1 - P\left(X \geqslant 651\right) - P\left(X \leqslant 649\right)$

$P(649 \leqslant X \leqslant 651) = 1 - P(X \geqslant 651) - P(X \leqslant 649)$

$P(649 \leqslant X \leqslant 651) \approx 0{,}683$

Réponse B

Exercice 4:

1)a) La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1\ ;\ 25]$

$\mathbf{f}(x) = \dfrac{x+2-\ln x}{x}$ (forme $\dfrac{u}{v}$ d'où $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-v'u}{v^2}$)

$$\mathbf{f}'(x) = \frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)x - 1\,(x+2-\ln x)}{x^2} = \frac{\left(\frac{x-1}{x}\right)\times x - x - 2 + \ln x}{x^2}$$

$$\mathbf{f}'(x) = \frac{x-1-x-2+\ln x}{x^2} = \frac{-3+\ln x}{x^2}$$

1)b) Résoudre $-3+\ln x > 0$:

$-3+\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > 3 \Leftrightarrow \ln x > 3\times 1 \Leftrightarrow \ln x > 3\times \ln e$ car $\ln e = 1$

$\ln x > 3\times \ln e \Leftrightarrow \ln x > \ln e^3$ car $n \ln a = \ln a^n$

Donc $x > e^3$

1)c) Tableau de variation:

x	1	e^3	25
$\mathbf{f}'(x)$	$-$	0	$+$
$\mathbf{f}(x)$	$\mathbf{f}(1) \searrow$	$\mathbf{f}(e^3)$	$\nearrow \mathbf{f}(25)$

avec $\begin{cases} \mathbf{f}(1) = \dfrac{1+2-\ln 1}{1} = 3 \\ \mathbf{f}(e^3) = \dfrac{e^3+2-\ln e^3}{e^3} = \dfrac{e^3-1}{e^3} \approx 0{,}950 \\ \mathbf{f}(25) = \dfrac{25+2-\ln 25}{25} = \dfrac{27-\ln 25}{25} \approx 0{,}951 \end{cases}$

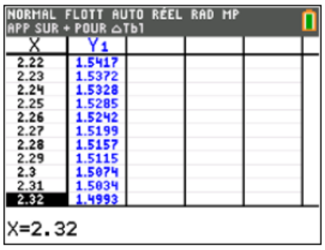
1)d) D'après le tableau de variation et les valeurs trouvées l'équation $\mathbf{f}(x) = 1{,}5$ n'admet qu'une seule solution

Dans l'intervalle $]1\ ;\ e^3[$ la fonction est continue et strictement décroissante

$1{,}5 \in \left]\mathbf{f}(e^3)\ ;\ \mathbf{f}(1)\right[$ donc il existe une unique solution $\alpha \in]1\ ;\ e^3[$ tel que $\mathbf{f}(\alpha) = 1{,}5$

d'après le corollaire du Théorème des Valeurs Intermédiares.

1)e) A la calculatrice on trouve:


NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
APP SUR + POUR △Tbl

X	Y1
2.22	1.5417
2.23	1.5372
2.24	1.5328
2.25	1.5285
2.26	1.5242
2.27	1.5199
2.28	1.5157
2.29	1.5115
2.3	1.5074
2.31	1.5034
2.32	1.4993

X=2.32

$\begin{cases} \mathbf{f}(2{,}31) \approx 1{,}503 > 1{,}5 \\ \mathbf{f}(2{,}32) \approx 1{,}499 < 1{,}5 \end{cases}$

Conclusion: $2{,}31 < \alpha < 2{,}32$

2)a) Le coût moyen de fabrication d'une pièce est de $\mathbf{f}(x)$ euros

D'après le tableau de variation, le minimum est atteint pour $x = e^3 \approx 20{,}1$ et vaut $\mathbf{f}(e^3) \approx 0{,}950$.

Pour que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit minimal, l'entrprise doit produire environ 2010 pièces.

Ce coût moyen est donc de $0{,}95$ euros.

2)b) $\mathbf{f}(x) \leqslant 1{,}5$ il faut fabriquer au moins 232 pièces (question 1)e)) pour que le coût moyen de fabrication soit inférieur ou égal $1{,}5$ euros.

2)c) Le minimum est atteint pour $x = e^3$ et vaut $\mathbf{f}(e^3) \approx 0{,}95 > 0{,}50$

Donc il est impossible que le coût moyen de fabrication soit de $0{,}50$ euros.