# Correction Amérique du Nord ES 2018

## Exercice 1:

1) X la variable aléatoire qui compte le nombres de bulbes qui germent.
On effectue au hasard 20 tirages indépendants et identiques.
A chaque tirage, la réussite est que le bulbe a germé et l'échec est que le bulbe n'ait pas germé:
La probabilté de la réussite est $p = 0,85$ et donc la probabilté de l'échec est $q = 1 - p = 0,15$
X suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,85$
A la calculatrice, on trouve:
$P(X \leqslant 15) \approx 0,170$
$P(X \geqslant 15) = 1 - P(X \leqslant 14) \approx 0,933$
**Réponse D**

2) On compte 9 carreaux minimum (rectangle de longueur 4 et de largeur 2, donc $A_1 = 4 \times 2 = 8$ auquel on ajoute l'aire du triangle rectangle de base 2 et de hauteur 1: $A_2 = \dfrac{base \times hauteur}{2} = \dfrac{2 \times 1}{2} = 1$ soit $Aire = 8 + 1 = 9$ ) et et 10 maximum (rectangle de longueur 5 et de largeur 2, donc $A_3 = 5 \times 2 = 10$ )
**Réponse B**

3) g définie sur $I = ]0\ ;+\infty[$ par $g(x) = \ln x$
Si G est une primitive de g sur $I$ , G est dérivable sur $I$ et $G'(x) = g(x)$
$G(x) = x \ln x - x$ G est dérivable sur $]0\ ;+\infty[$
$G'(x) = 1 \times \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$
Donc $G'(x) = g(x)$
**Réponse C**

4) $\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > \ln 1 \Leftrightarrow x > 1$
**Réponse C**

## Exercice 2:

### Partie A:

1) $p = 0,05$ $n = 400 \geqslant 30$ $np = 400 \times 0,05 = 20 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 400 \times (1 - 0,05) = 380 \geqslant 5$
Les conditions sont réunies
$I = \left[ p - 1,96 \times \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\ ; p + 1,96 \times \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}} \right] \approx [0,028\ ; 0,071]$
La fréquence observée est: $f = \dfrac{25}{400} = \dfrac{1}{16} = 0,0625$
On constate que $f \in I$ , on ne rejette pas l'hypothèse.

2) $f = \dfrac{38}{400} = \dfrac{19}{200} = 0,095$ ; $n = 400 \geqslant 30$ , $nf = 400 \times 0,095 = 38 \geqslant 5$ et $n(1-f) = 400(1 - 0095) = 362 \geqslant 5$
Les conditions sont réunies
$I = \left[ f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ; f + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \right] \approx [0,045\ ; 0,145]$

### Partie B:

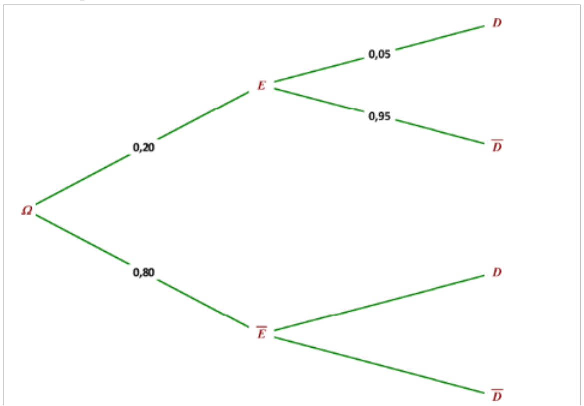
1) X suit une loi normale de paramètres $\mu = 2500$ et $\sigma = 400$
A la calculatrice, on trouve:
$P(2100 \leqslant X \leqslant 2900) \approx 0,683$

2)a) $P(X \leqslant a) = 0,95$
$Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma} = \dfrac{X - 2500}{400}$ , Z suit une loi normale centrée réduite $N(0,1)$
$P(X \leqslant a) = P\left(Z \leqslant \dfrac{a - 2500}{400}\right) = 0,95$
A la calculatrice on trouve
$\dfrac{a - 2500}{400} \approx 1,64$ donc $a \approx 3158$

2)b) Cela signifie donc que si le site produit $3158$ rubans, il y a 5% de chance qu'il y ait rupture de stock..

### Partie C:

1) Arbre pondéré:



2) Le ruban LED est d'extérieur ET défectueux; on calcule donc:

$\mathbf{P(E \cap D) = P(E) \times P_E(D) = 0{,}2 \times 0{,}05 = 0{,}01}$

La probabilité que le ruban LED soit d'extérieur et défectueux est de 1%.

3) Par hypothèse, on sait que: $\mathbf{P(D) = 0{,}06}$

On utilise la formule des probabilités totales:

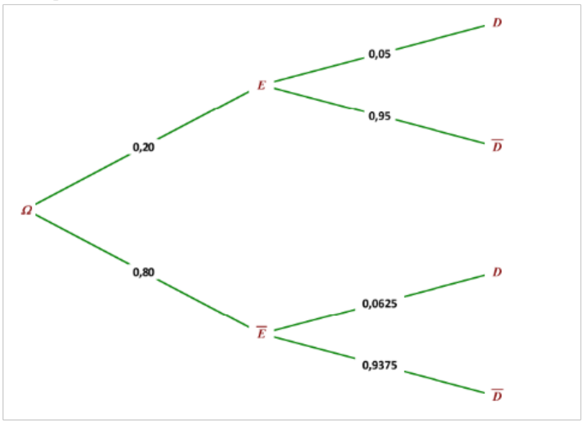
$$\mathbf{P(D) = P(D \cap E) + P\left(D \cap E^{-}\right) = P(E) \times P_E(D) + P\left(E^{-}\right) \times P_{E^{-}}(D)}$$

$$\mathbf{P(D) = 0{,}2 \times 0{,}05 + 0{,}8 \times P_{E^{-}}(D) = 0{,}06}$$

Donc $\mathbf{0{,}8 \times P_{E^{-}}(D) = 0{,}06 - 0{,}2 \times 0{,}05 = 0{,}05}$ , d'où $\mathbf{P_{E^{-}}(D) = 0{,}0625}$

***Interprétation***: Sachant que le ruban LED est d'intérieur, la probabilité qu'il soit défectueux est de 0,0625.

Arbre pondéré final:




# Exercice 3:

1)a) $u_n$ est le nombre de contrats souscrit l'année $\mathbf{2017+n}$ et $u_{n+1}$ l'année suivante.

Chaque année 14% de contrats supplémentaires $u_n + \frac{14}{100} \times u_n = \mathbf{1{,}14}\ u_n$ mais 7 contrats sont résiliés

Donc $u_{n+1} = \mathbf{1{,}14}\ u_n - 7$

1)b) $u_0 = \mathbf{120}$

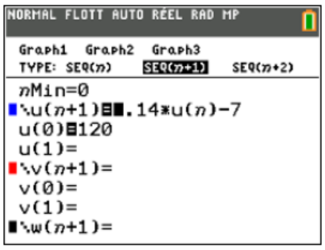
$$u_1 = u_0 - \frac{14}{100} \times u_0 - 7 = \mathbf{1{,}14}\ u_0 - 7 = \mathbf{1{,}14 \times 120 - 7 = 129{,}8}$$

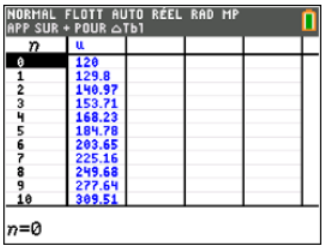
Donc en 2018, la société aura souscrit 130 contrats

2)a) Algorithme:

| |
|---|
| $n \leftarrow 0$ |
| $u \leftarrow 0$ |
| **Tant que** $u \leqslant 190$ |
|    $n \leftarrow n+1$ |
|    $u \leftarrow 1{,}14 \times u - 7$ |
| **Fin Tant que** |
| **Afficher 2017+n** |

2)b) A la calculatrice, on trouve $n = 6$ ; ce qui signiife que la société devra embaucher à partir de $\mathbf{2017+6}$ soit en $\mathbf{2023}$




3)a) $v_n = u_n - 50$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 50 = 1{,}14\ u_n - 7 - 50 = 1{,}14\ u_n - 57 = 1{,}14\left(u_n - \frac{57}{1{,}14}\right) = 1{,}14\left(u_n - 50\right)$$

D'où $v_{n+1} = 1{,}14\ v_n$

La suite $\left(v_n\right)$ est géométrique de raison $q = 1{,}14$

Le premier terme: $v_0 = u_0 - 50 = 120 - 50 = 70$

3)b) Expression de $v_n$ en fonction de n:

$v_n = v_0 \times q^n = 70 \times 1{,}14^n$

Comme $v_n = u_n - 50$ , on obtient $u_n = v_n + 50$

Soit $u_n = 50 + 70 \times 1{,}14^n$

3)c) $u_n = 50 + 70 \times 1{,}14^n$ on veut trouver par le calcul: $u_n > 190$

$u_n = 50 + 70 \times 1{,}14^n > 190 \iff 70 \times 1{,}14^n > 140 \iff 1{,}14^n > 2$

La fonction "ln" est croissante sur $\left]0\ ;\ +\infty\right[$

$\ln 1{,}14^n > \ln 2 \iff n \ln 1{,}14 > \ln 2$

Comme $1{,}14 > 1 \iff \ln 1{,}14 > \ln 1$ soit $\ln 1{,}14 > 0$

$n > \dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}14}$ or $\dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}14} \approx 5{,}3$

On obtient $u_n > 190$ donc $n \geqslant 6$

On retrouve le résultat trouvé à la question 2)b) , à partir de $2023$ la société devra embaucher.

# Exercice 4:

## Partie A:

1) Lorsqu'il travaille 3 heures par jour il y a "saturation" car lorsque la fonction « satisfaction » atteint la valeur 100, on dit qu'il y a « saturation ».

2) Comme $f'(x) < 0$ sur l'intervalle $]3 ; 6]$ , il y a rejet lorsque la durée de travail de cet étudiant se situe dans l'intervalle $]3 ; 6]$ .

***La fonction « envie » étant définie comme la fonction dérivée de la fonction « satisfaction », on dira:***

**- il y a « rejet » lorsque la fonction « envie » est strictement négative.**

## Partie B:

1) $g(x) = (12{,}5\,x)\,e^{-0{,}125x+1}$ , $x \in [0 ; 30]$

La fonction g est dérivable sur l'intervalle $[0 ; 30]$

$g'(x) = 12{,}5\,e^{-0{,}125x+1} + (12{,}5\,x) \times \left(-0{,}125 \times e^{-0{,}125x+1}\right)$

$g'(x) = e^{-0{,}125x+1}\,(12{,}5 - 12{,}5 \times 0{,}125)$

$g'(x) = e^{-0{,}125x+1}\,(12{,}5 - 1{,}5625\,x)$

2) Le signe de $g'(x)$ dépend du signe de $(12{,}5 - 1{,}5625\,x)$ car $e^{-0{,}125x+1} > 0$

$g'(x) = 0 \iff 12{,}5 - 1{,}5625\,x = 0 \iff 1{,}5625\,x = 12{,}5 \iff x = \dfrac{12{,}5}{1{,}5625} = 8$

| $x$ | 0 8 30 |
|---|---|
| $signe\,(12{,}5 - 1{,}5625\,x)$ | + 0 - |

car $a = -1{,}5625 < 0$

Tableau de variations:

| $x$ | 0 8 30 |
|---|---|
| $g'(x)$ | + 0 - |
| $g(x)$ | 0 ↗ 100 ↘ g(30) |

$$\begin{cases} g(0) = 0 \\ g(8) = 100 \times e^{-0{,}125\times 8+1} = 100\,e^0 = 100 \\ g(30) = 375 \times e^{-0{,}125\times 30+1} = 375\,e^{-2{,}75} \approx 23{,}973 \end{cases}$$

3) La durée de séjour correspondant à l'effet de « saturation » est de $8$ jours car $g(8) = 100$ .

## Partie C:

1) La fonction h est définie sur l'intervalle $[10 ; 50]$ par: $h(x) = \dfrac{90}{1 + e^{-0{,}25x+6}}$

D'après le logiciel, on a:

$$h''(x) = \frac{5{,}625\,e^{-0{,}25x+6}\left(e^{-0{,}25x+6} - 1\right)}{\left(1 + e^{-0{,}25x+6}\right)^3}$$

2) Dans l'intervalle $[10 ; 50]$ résoudre l'inéquation suivante:

$e^{-0{,}25x+6} - 1 > 0 \iff e^{-0{,}25x+6} > 1 \iff e^{-0{,}25x+6} > e^0$ $\quad (e^a > e^b \iff a > b)$

Donc $-0{,}25\,x + 6 > 0 \iff -0{,}25\,x > -6 \iff x < \dfrac{-6}{-0{,}25} \iff x < 24$

***Conclusion:*** $e^{-0{,}25x+6} - 1 > 0 \iff x < 24$

3) Convexité de la fonction h sur $[10 ; 50]$

Le signe de $h''(x) = \dfrac{5{,}625\,e^{-0{,}25x+6}\left(e^{-0{,}25x+6} - 1\right)}{\left(\left|1 + e^{-0{,}25x+6}\right|\right)^3}$ ne dépend que du signe de $e^{-0{,}25x+6} - 1$

car $e^{-0{,}25x+6} > 0$ et $1 + e^{-0{,}25x+6} > 0$

***Conclusion:*** $\begin{cases} h''(x) > 0, & x \in ]10 ; 24[ \\ h''(x) < 0, & x \in ]24 ; 50[ \\ h''(x) = 0, & x = 24 \end{cases}$

h est convexe sur $]10 ; 24[$ , concave sur $]24 ; 50[$

h admet un point d'inflexion d'abscisse $x = 24$

4) La fonction "envie" décroit quand la fonction $h''$ est négative donc à partir d'un salaire annuel de 24000 euros.

5) On doit résoudre l'équation suivante: $h(x) = \dfrac{90}{1 + e^{-0{,}25x+6}} = 80$

$$\frac{90}{1 + e^{-0{,}25x+6}} = 80 \iff 90 = 80\left(1 + e^{-0{,}25x+6}\right) \iff 1 + e^{-0{,}25x+6} = \frac{90}{80} = \frac{9}{8}$$

$$e^{-0{,}25x+6} = \frac{9}{8} - 1 = \frac{1}{8} = e^{\ln \frac{1}{8}} \quad (e^a = e^b \iff a = b)$$

$$-0{,}25\,x + 6 = \ln \frac{1}{8} = -\ln 8 \iff -0{,}25\,x = -\ln 8 - 6 \iff 0{,}25\,x = 6 + \ln 8$$

$$\iff x = \frac{6 + \ln 8}{0{,}25} = \frac{6 + \ln 8}{\frac{1}{4}} = 4\,(6 + \ln 8) = 24 + 4\ln 2^3 = 24 + 12\ln 2 \approx 32{,}318 \text{ car } \ln a^n = n \ln a$$

La fonction "satisfaction" atteint 80 pour un salaire annuel d'environ $32318$ euros.