Correction: Sujet S Pondichéry 2018

Exercice 1:

Partie A:

$\mathbf{T}_n$: température en degré Celsius du four au bout de n heures
$\mathbf{T}_{\text{à}} = 1000\,°\ \mathbf{C}$

1) La température est donnée par l'algorithme suivant:
$\mathbf{T} \longleftarrow 0{,}82 \times \mathbf{T} + 3{,}6$
Donc on a: $\mathbf{T}_{n+1} = 0{,}82 \times \mathbf{T}_n + 3{,}6$
Au bout de 4 heures: (arrondi à l'uité)

$$\mathbf{T}_1 = 0{,}82 \times \mathbf{T}_0 + 3{,}6 = 824$$
$$\mathbf{T}_2 = 0{,}82 \times \mathbf{T}_1 + 3{,}6 = 679$$
$$\mathbf{T}_3 = 0{,}82 \times \mathbf{T}_2 + 3{,}6 = 560$$
$$\mathbf{T}_4 = 0{,}82 \times \mathbf{T}_3 + 3{,}6 = 463$$

Au bout de 4 heures, la températuredu four sera de 463°C

2) $\mathbf{T}_n = 0{,}82^n \times 980 + 20$?
Initialisation: $\mathbf{T}_0 = 0{,}82^0 \times 980 + 20 = 1 \times 980 + 20 = 1000$
Vrai pour $n = 0$
Hérédité: On suppose que c'est vrai au rang n, soit $\mathbf{T}_n = 0{,}82^n \times 980 + 20$, et on doit démontrer que c'est vrai au rang (n+1)
Montrons que : $\mathbf{T}_{n+1} = 0{,}82^{n+1} \times 980 + 20$?
$\mathbf{T}_{n+1} = 0{,}82 \times \mathbf{T}_n + 3{,}6 \iff \mathbf{T}_{n+1} = 0{,}82 \times \left(0{,}82^n \times 980 + 20\right) + 3{,}6 = 0{,}82^{n+1} \times 980 + 16{,}4 + 3{,}6$
$\mathbf{T}_{n+1} = 0{,}82^{n+1} \times 980 + 20$
Vrai au rang (n+1)

Conclusion: Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{T}_n = 0{,}82^n \times 980 + 20$

3) La porte peut être ouverte sans risque si la température est inférieure à 70°C:
$\mathbf{T}_n \leqslant 70 \iff 0{,}82^n \times 980 + 20 \leqslant 70 \iff 0{,}82^n \times 980 \leqslant 50 \iff 0{,}82^n \leqslant \dfrac{50}{980} = \dfrac{5}{98}$
La fonction ln est croissante sur $]\,0\ ;+\infty\,[$ donc $\ln\ 0{,}82^n \leqslant \ln\left(\dfrac{5}{98}\right) \iff n \ln\,(0{,}82) \leqslant \ln\left(\dfrac{5}{98}\right)$
$0{,}82 < 1$ donc $\ln\,(0{,}82) < 0$
$$n \geqslant \frac{\ln\left(\dfrac{5}{98}\right)}{\ln\,(0{,}82)} \quad (\approx 14{,}99)$$
Conclusion: $n = 15$
Au bout de 15 heures la température sera inférieure à 70°C, on peut ouvrir la porte sans risque de casse.

Partie B:

1) Calcul de a et b:
$\mathbf{f}(t) = a \times e^{\frac{-t}{5}} + b$, la fonction est dérivable sur $\mathbf{R}$ d'où $\mathbf{f}'(t) = \dfrac{-a}{5} \times e^{\frac{-t}{5}}$
Par hypothése on a:
$$\begin{cases} \mathbf{f}(0) = 1000 \\ \mathbf{f}'(t) + \dfrac{1}{5}\,\mathbf{f}(t) = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b = 1000 \\ \cancel{\dfrac{-a}{5} \times e^{\frac{-t}{5}}} + \cancel{\dfrac{a}{5} \times e^{\frac{-t}{5}}} + \dfrac{1}{5}\,b = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1000 - b \\ b = 20 \end{cases}$$
$\begin{cases} a = 980 \\ b = 20 \end{cases}$ donc on peut écrire: $\mathbf{f}(x) = 980 \times e^{\frac{-t}{5}} + 20$

2)a) $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathbf{f}(t) = ?$

$\lim\limits_{t \to +\infty} e^{\frac{-t}{5}} = 0$, donc $\lim\limits_{t \to +\infty} 980 \times e^{\frac{-t}{5}} + 20 = 20$

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbf{f}(t) = 20$$

2)b) $\mathbf{f}(x) = 980 \times e^{\frac{-t}{5}} + 20$, f est dérivable sur $[\,0\ ;+\infty\,[$ et $\mathbf{f}'(t) = -980 \times \dfrac{1}{5} \times e^{\frac{-t}{5}} = -196 \times e^{\frac{-t}{5}}$

On constate que $\mathbf{f}'(t) < 0$

Tableau de variations:

x	0	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	$1000 \searrow$	20

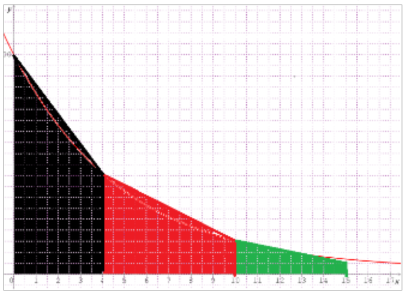
2)c) $f(t)=70 \Leftrightarrow 980\times e^{\frac{-t}{5}}+20=70 \Leftrightarrow 980\times e^{\frac{-t}{5}}=50 \Leftrightarrow e^{\frac{-t}{5}}=\frac{5}{98}$

$\ln e^{\frac{-t}{5}}=\ln\left(\frac{5}{98}\right) \Leftrightarrow \frac{-t}{5}\times \ln e=\ln\left(\frac{5}{98}\right) \Leftrightarrow \frac{-t}{5}=\ln\left(\frac{5}{98}\right)$

$t=-5\ln\left(\frac{5}{98}\right)$

D'où $t\approx 14{,}88$ heures (à 10^{-2} près) soit 893 minutes.
A partir de 893 minutes, on peut ouvrir sans risque .

3)a) $\int_0^{15} f(t)\ dt=\int_0^{15}\left(980\times e^{\frac{-t}{5}}+20\right)dt$ représente l'aire comprise entre la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=15$



$\mathbf{Aire}_{totale}=\mathbf{A}_{noire}+\mathbf{A}_{rouge}+\mathbf{A}_{verte}$ **(aire trapèze: A = [(petite base+grande base)xhauteur]/2**

$A_t=\frac{(1000+450)\times 4}{2}+\frac{(450+150)\times 6}{2}+\frac{(150+50)\times 5}{2}=5200$

La moyenne est donc: $\frac{5200}{15}\approx 346{,}7$

3)b) $t_{moy}=\frac{1}{15-0}\int_0^{15} f(t)\ dt=\frac{1}{15}\int_0^{15}\left(980\times e^{\frac{-t}{5}}+20\right)dt=\frac{980}{15}\int_0^{15} e^{\frac{-t}{5}}\ dt+\frac{20}{15}\int_0^{15} 1\ dt$

$t_{moy}=\frac{980}{15}\left[-5\times e^{\frac{-t}{5}}\right]_0^{15}+\frac{20}{15}\left[t\right]_0^{15}=\frac{980}{15}\left(5-5\,e^{-3}\right)+\frac{20}{\cancel{15}}\times\cancel{15}$

$t_{moy}=\frac{980}{15}\left(5-5\,e^{-3}\right)+20\approx 330{,}4$

La température moyenne du four sur les 15 premières heures de refroidissement est de **330°C**

4)a) $d(t)=f(t)-f(t+1)=980\times e^{\frac{-t}{5}}+20-\left(980\times e^{\frac{-(t+1)}{5}}+20\right)=\left(980\times e^{\frac{-t}{5}}\right)\times 1-\left(980\times e^{\frac{-t}{5}}\right)\times e^{\frac{-1}{5}}$

$d(t)=980\times e^{\frac{-t}{5}}\times\left(1-e^{\frac{-1}{5}}\right)$

4)b) $\lim_{t\to+\infty} d(t)=0$ car $\lim_{t\to+\infty} e^{\frac{-t}{5}}=0$

Il semblerait qu'au bout d'un certain temps, la température se stabilise.

Exercice 2:

1)a) $j=\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$|j|=\sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$

$\begin{cases}\cos\theta=\frac{a}{|j|}=\frac{-1}{2}\\ \sin\theta=\frac{b}{|j|}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ soit $\theta=\frac{2\pi}{3}$

La forme exponentielle: $j=1\,e^{i\frac{2\pi}{3}}$

La forme trigonométrique: $j=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

Formes exponentielles:

$a'=ja=-4e^{i\frac{2\pi}{3}}$ or $-1=e^{i\pi}$ donc $a'=4e^{i\pi}\times e^{i\frac{2\pi}{3}}=4e^{i\frac{5\pi}{3}}$ (car $e^{a}\times e^{b}=e^{a+b}$)

La mesure principale de $\frac{5\pi}{3}$ est $\frac{-\pi}{3}$: $\frac{5\pi}{3}=\frac{6\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=2\pi-\frac{\pi}{3}$ donc MP: $-\frac{\pi}{3}$ ((2π) correspondant à un tour, cercle trigonométrique)

d'où $a'=4e^{i\frac{-\pi}{3}}$

$b'=jb=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ (car $2=2e^{i\times 0}$)

$c'=jc=4e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Formes algébriques:

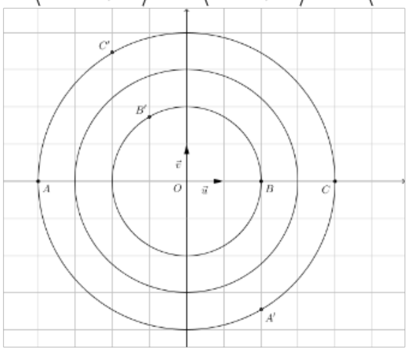
$a'=4e^{i\frac{-\pi}{3}}=4\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2-2i\sqrt{3}$

$b'=2e^{i\frac{2\pi}{3}}=2\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-1+i\sqrt{3}$

$c'=4e^{i\frac{2\pi}{3}}=4\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-2+2i\sqrt{3}$

1)b) $\mathbf{A}(-4,0)$, $\mathbf{B}(2,0)$, $\mathbf{C}(4,0)$

$\mathbf{A'}\left(2,\ -2\sqrt{3}\right)$, $\mathbf{B'}\left(-1,\ \sqrt{3}\right)$ et $\mathbf{C'}\left(-2,2\sqrt{3}\right)$



2) Les points A', B' et C' sont-ils alignés?

$\mathbf{A'}\left(2,\ -2\sqrt{3}\right)$, $\mathbf{B'}\left(-1,\ \sqrt{3}\right)$ et $\mathbf{C'}\left(-2,2\sqrt{3}\right)$

$\overrightarrow{\mathbf{A'B'}}\left(-3\ ;3\sqrt{3}\right)$ et $\overrightarrow{\mathbf{A'C'}}\left(-4\ ;4\sqrt{3}\right)$

On constate que : $\overrightarrow{\mathbf{A'C'}}=\frac{4}{3}\ \overrightarrow{\mathbf{A'B'}}$

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathbf{A'B'}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{A'C'}}$ sont colinéaires

Les points A', B' et C' sont alignés.

3) M milieu de $[\mathbf{A'C}]$ d'où $z_{\mathrm{M}}=\frac{z_{(\mathrm{A'})}+z_{\mathrm{C}}}{2}=\frac{2-2i\sqrt{3}+4}{2}=3-i\sqrt{3}$

N milieu de $[\mathbf{C'C}]$ d'où $z_{\mathrm{N}}=\frac{z_{(\mathrm{C'})}+z_{\mathrm{C}}}{2}=\frac{-2+2i\sqrt{3}+4}{2}=1+i\sqrt{3}$

P milieu de $[\mathbf{A\ C'}]$ d'où $z_{\mathrm{P}}=\frac{z_{(\mathrm{C'})}+z_{\mathrm{A}}}{2}=\frac{-2+2i\sqrt{3}-4}{2}=-3+i\sqrt{3}$

$\mathbf{MP}=|z_{p}-z_{\mathrm{M}}|=|-6+2i\sqrt{3}|=\sqrt{(-6)^{2}+\left(2\sqrt{3}\right)^{2}}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$

$\mathbf{NP}=|z_{p}-z_{\mathrm{N}}|=|-4|=4$

$\mathbf{MN}=|z_{\mathrm{N}}-z_{\mathrm{M}}|=|-2+2i\sqrt{3}|=\sqrt{(-2)^{2}+\left(2\sqrt{3}\right)^{2}}=\sqrt{16}=4$

On constate que: $\mathbf{MN}=\mathbf{NP}$

Le triangle MNP est isocèle en N.

Exercice 3:

Partie A:

1)a) $\mathbf{X}_{\mathrm{U}}$ suit une loi normale: $\mu_{\mathrm{U}}=0{,}58$ et $\sigma_{\mathrm{U}}=0{,}21$

A la calculatrice on obtient:

$\mathbf{P}\left(\mathbf{X}_{\mathrm{U}}<0{,}2\right)=0{,}035$

$\mathbf{P}\left(0{,}5\leqslant\mathbf{X}_{\mathrm{U}}<0{,}8\right)=0{,}501$

1)b) On récupère les cristaux selon leur taille:

En utilisant la question 1)a) on a:

$\mathbf{1800\times 0{,}035=63}$, soit 63 grammes de sucre dans le récipient à fond étanche.

$\mathbf{1800\times 0{,}501=901{,}80}$, soit 901,80 grammes de sucre dans le tamis 2 (taille compris entre 0,5mm et 0,8mm)

2) $\mathbf{X}_{\mathrm{V}}$ suit une loi normale: $\mu_{\mathrm{V}}=0{,}65$ et σ_{V}

40% des cristaux sont dans le tamis 2: on a $\mathbf{P}\left(0{,}5 \leqslant \mathbf{X_V} < 0{,}8\right) = 0{,}40$

On pose $\mathbf{Z} = \dfrac{\mathbf{X_V} - \mu_V}{\sigma_V} = \dfrac{\mathbf{X_V} - 0{,}65}{\sigma_V}$, Z suit une loi normale centrée réduite, $\mathbf{N}\ (0{,}1)$

$$\mathbf{P}\left(0{,}5 \leqslant \mathbf{X_V} < 0{,}8\right) = 0{,}40 \iff \mathbf{P}\left(\frac{0{,}5-0{,}65}{\sigma_V} \leqslant \frac{\mathbf{X_V}-0{,}65}{\sigma_V} < \frac{0{,}8-0{,}65}{\sigma_V}\right) = \mathbf{P}\left(\frac{-0{,}15}{\sigma_V} \leqslant \mathbf{Z} < \frac{0{,}15}{\sigma_V}\right) = 0{,}40$$

$$\mathbf{P}\left(\frac{-0{,}15}{\sigma_V} \leqslant \mathbf{Z} < \frac{0{,}15}{\sigma_V}\right) = 1 - 2\,\mathbf{P}\left(\mathbf{Z} > \frac{0{,}15}{\sigma_V}\right) = 0{,}4 \iff 2\,\mathbf{P}\left(\mathbf{Z} > \frac{0{,}15}{\sigma_V}\right) = 0{,}6 \iff \mathbf{P}\left(\mathbf{Z} > \frac{0{,}15}{\sigma_V}\right) = 0{,}3$$

A la calculatrice (TI83 CE) on trouve: ***FracNormale(0.3,0,1,RIGHT)***

$\dfrac{0{,}15}{\sigma_V} \approx 0{,}524$ donc $\sigma_V \approx \dfrac{0{,}15}{0{,}524}$ soit $\sigma_V \approx 0{,}286$

Partie B:

1)a) $\mathbf{P}(\mathbf{U}) = 0{,}3$, $\mathbf{P}(\mathbf{V}) = 0{,}70$, $\mathbf{P_U}(\mathbf{E}) = 0{,}03$ et $\mathbf{P_V}(\mathbf{E}) = 0{,}05$

$\mathbf{P}(\mathbf{E}) = \mathbf{P}(\mathbf{E} \cap \mathbf{U}) + \mathbf{P}(\mathbf{E} \cap \mathbf{V}) = \mathbf{P}(\mathbf{U}) \times \mathbf{P_U}(\mathbf{E}) + \mathbf{P}(\mathbf{V}) \times \mathbf{P_V}(\mathbf{E})$

$\mathbf{P}(\mathbf{E}) = 0{,}3 \times 0{,}03 + 0{,}7 \times 0{,}05$

$\mathbf{P}(\mathbf{E}) = 0{,}044$

1)b) On sait que le paquet porte le label extra-fin

$\mathbf{P_E}(\mathbf{U}) = \dfrac{\mathbf{P}(\mathbf{E} \cap \mathbf{U})}{\mathbf{P}(\mathbf{E})} = \dfrac{\mathbf{P}(\mathbf{U}) \times \mathbf{P_E}(\mathbf{U})}{\mathbf{P}(\mathbf{E})}$

$\mathbf{P_E}(\mathbf{U}) = \dfrac{0{,}3 \times 0{,}03}{0{,}044} \approx 0{,}205$

2) $\mathbf{P_E}(\mathbf{U}) = 0{,}3 = \dfrac{\mathbf{P}(\mathbf{E} \cap \mathbf{U})}{\mathbf{P}(\mathbf{E})} = \dfrac{\mathbf{P}(\mathbf{U}) \times \mathbf{P_E}(\mathbf{U})}{\mathbf{P}(\mathbf{E})}$

$\mathbf{P_E}(\mathbf{U}) = \dfrac{x \times 0{,}03}{0{,}03\,x + (1-x) \times 0{,}05} = 0{,}3$ avec $\mathbf{P}(\mathbf{E}) = 0{,}03\,x + (1-x) \times 0{,}05 = 0{,}05 - 0{,}02\,x$

$\dfrac{x \times 0{,}03}{0{,}03\,x + (1-x) \times 0{,}05} = 0{,}3 \iff 0{,}03\,x = 0{,}3 \times (0{,}05 - 0{,}02\,x) = 0{,}015 - 0{,}006\,x$

$\iff 0{,}03\,x + 0{,}006\,x = 0{,}015 \iff 0{,}036\,x = 0{,}015 \iff x = \dfrac{0{,}015}{0{,}036} = \dfrac{15}{36} = \dfrac{5}{12}$

$x = \dfrac{5}{12}\ (\approx 0{,}42)$

$\mathbf{P}(\mathbf{U}) = \dfrac{5}{12}$ donc $\mathbf{P}(\mathbf{V}) = \dfrac{7}{12}$

42% des paquets proviennent de l'exploitation U .

58% des paquets proviennent de l'exploitation V.

Partie C:

1) $n = 150$ et $p = 0{,}3$

$n = 150 \geqslant 30$, $np = 45 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 105 \geqslant 5$

Les conditions sont vérifiées

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% est donné par:

$$\mathbf{I} = \left[p - 1{,}96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ; p + 1{,}96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] = \left[0{,}3 - 1{,}96 \times \sqrt{\frac{0{,}3 \times 0{,}7}{150}}\ ; 0{,}3 + 1{,}96 \times \sqrt{\frac{0{,}3 \times 0{,}7}{150}}\right]$$

$\mathbf{I} \approx [0{,}226\ ;\ 0{,}374]$

La fréquence observée est: $f_{obs} = \dfrac{30}{150} = \dfrac{3}{15} = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$

on constate que: $f_{obs} \notin \mathbf{I}$

Au risque d'erreur de 5%, on peut donc mettre en doute l'annonce de l'entreprise.

2) $n = 150$ et $f = 0{,}42$

$n = 150 \geqslant 30$, $nf = 63 \geqslant 5$ et $n(1-f) \Rightarrow 87 \geqslant 5$

Les conditions sont vérifiées

Un intervalle de confiance au niveau 95% est donné par:

$$\mathbf{I_C} = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0{,}42 - \frac{1}{\sqrt{150}}\ ; 0{,}42 + \frac{1}{\sqrt{150}}\right]$$

$\mathbf{I_C} \approx [0{,}338\ ;\ 0{,}502]$

Exercice 4:

1) equation paramétrique de la droite (CD)

Soit $\vec{u} = \overrightarrow{\mathbf{CD}}$ un vecteur directeur de la droite (CD): $\vec{u}\ (4\ ;\ 0\ ;\ -4)$

C appartient à la droite (CD)

on a la représentation paramétrique suivante:

$$\begin{cases} x = x_C + 4k \\ y = y_C \\ z = z_C - 4k \end{cases},\ k \in \mathbf{R} \text{ soit } \begin{cases} x = 4k \\ y = 3 \\ z = 2 - 4k \end{cases},\ k \in \mathbf{R}$$

2)a) $M \in (CD)$ donc les coordonnées de M sont $M(4k, 3, 2-4k)$

$BM = \sqrt{(x_M - x_B)^2 + (y_M - y_B)^2 + (z_M - z_B)^2} = \sqrt{(4k-4)^2 + (3+1)^2 + (2-4k)^2} = \sqrt{32k^2 - 48k + 36}$

$BM = 2\sqrt{8k^2 - 12k + 9}$

La fonction racine carrée est croissante sur $[0 ; +\infty[$

Etudions : $g(k) = 8k^2 - 12k + 9$ avec a=8, b=-12 et c=9

De plus $a > 0$, la focntion g admet un minimum pour $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{12}{16} = \frac{4 \times 3}{4 \times 4} = \frac{3}{4}$

La distance est minimale pour $M\left(4 \times \frac{3}{4}, 3, 2 - 4 \times \frac{3}{4}\right)$ soit $M(3, 3, -1)$

2)b) La droite (CD) a pour vecteur directeur $\vec{u}(4 ; 0 ; -4)$

Soit $\overrightarrow{BH}$ un vecteur directeur de la droite (BH):

$\overrightarrow{BH}(x_H - x_B ; y_H - y_B ; z_H - z_B)$ soit $\overrightarrow{BH}(-1 ; 4 ; -1)$

$\vec{u} \cdot \overrightarrow{BH} = 4 \times (-1) + 0 \times 4 + (-4) \times (-1) = -4 + 4 = 0$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont orthogonaux

Les droites (CD) et (BH) sont perpendiculaires

2)c) H est un point de la droite (CD)

La droite (BH) est la hauteur du triangle BCD issue de B.

$A_{BCD} = \frac{Base \times hauteur}{2} = \frac{BH \times CD}{2}$

Avec $BH = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ et $CD = \sqrt{(4)^2 + 0^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$A_{BCD} = \frac{BH \times CD}{2} = \frac{3\sqrt{2} \times 4\sqrt{2}}{2} = \frac{12 \times 2}{2} = 12$

L'aire du triangle BCD est égale à 12 cm^2

3)a) $\overrightarrow{CD}(4 ; 0 ; -4)$ et $\overrightarrow{BC}(-4 ; 4 ; 2)$

Les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires (les coordonnées ne sont pas proportionnelles)

Les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (BCD)

Soit $\vec{n}(a ; b ; c)$ le vecteur normal du plan (BCD):

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Leftrightarrow 4a - 4c = 0 \Leftrightarrow a = c$

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow -4a + 4b + 2c = 0 \Leftrightarrow -2a + 4b = 0 \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}a$

On pose $a = 2$

Donc $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = 2 \end{cases}$

Le vecteur $\vec{n}(2 ; 1 ; 2)$ est un vecteur normal du plan (BCD).

3)b) $\vec{n}(2 ; 1 ; 2)$ est un vecteur normal du plan (BCD)

Equation cartésienne du plan : $ax + by + cz + d = 0$ avec $\vec{n}(a ; b ; c)$ vecteur normal

Le plan (BCD) a pour équation cartésienne: $2x + y + 2z + d = 0$

Or le point C appartient au plan (BCD):

$2x_C + y_C + 2z_C + d = 0 \Leftrightarrow 3 + 4 + d = 0 \Leftrightarrow d = -7$

Le plan (BCD) a pour équation cartésienne: $2x + y + 2z - 7 = 0$

3)c) La droite Δ passe par A et est orthogonale au plan (BCD)

Le vecteur normal $\vec{n}(2 ; 1 ; 2)$ est le vecteur directeur de la droite Δ

Représentation paramétrique de la droite Δ: $\begin{cases} x = x_A + 2k \\ y = y_A + k \\ z = z_A + 2k \end{cases}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 2k \\ y = 1 + k \\ z = 4 + 2k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

3)d) Le point I est le point d'intersection de la droite Δ et du plan (BCD)

$\begin{cases} x = 2 + 2k \\ y = 1 + k \\ z = 4 + 2k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$ et $2x + y + 2z - 7 = 0$

$2(2 + 2k) + (1 + k) + 2(4 + 2k) - 7 = 0 \Leftrightarrow 9k + 6 = 0$

Soit $k = -\frac{6}{9} = -\frac{2}{3}$

$$\begin{cases} x_I = 2 + 2 \times \left(\frac{-2}{3}\right) \\ y_I = 1 + \left(\frac{-2}{3}\right) \\ z_I = 4 + 2 \times \left(\frac{-2}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \\ y_I = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ z_I = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \end{cases}$$

Le point I a pour coordonnées: $I\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right)$

4) $Volume = Base \times hauteur$

$Base = Aire_{triangle BCD} = 12$

$$\mathbf{AI} = \sqrt{(x_I - x_A)^2 + (y_I - y_A)^2 + (z_I - z_A)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3} - 2\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{8}{3} - 4\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{-4}{3}\right)^2 + \left(\frac{-2}{3}\right)^2 + \left(\frac{-4}{3}\right)^2}$$

$$\mathbf{AI} = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{4}{9} + \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{36}{9}} = \sqrt{4} = 2$$

$$\mathbf{V = 12 \times 2 = 24}$$

Le volume du tétraédre ABCD est égal à 24 cm^3