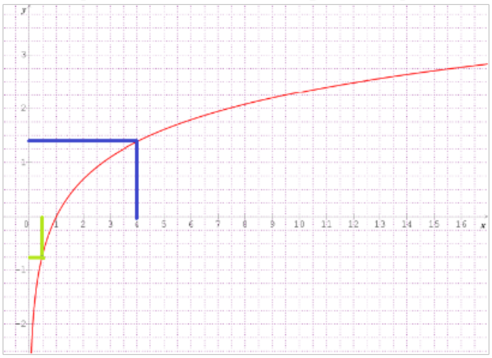
Correction: Sujet ES Pondichéry 2018

Exercice 1:

Courbe représentative de la fonction logarithme népérien:



1) $\mathbf{f'}(x) = -\dfrac{5\ \ln(x)}{x^2}$ donc le signe de $\mathbf{f'}(x)$ ne dépend que de $-\ln(x)$

Si $x \in]0{,}5\ ;1[$, $\mathbf{f'}(x) = \dfrac{-5\ \ln(x)}{x^2} > 0$

Si $x \in]1\ ;5[$, $\mathbf{f'}(x) = \dfrac{-5\ \ln(x)}{x^2} < 0$

Réponse b

2) Coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse $a = e$

$y = \mathbf{f'}(e)\ (x - e) + \mathbf{f}(e)$ avec $\mathbf{f'}(e) = \dfrac{-5\ \ln(e)}{e^2} = \dfrac{-5}{e^2}$

Réponse a

3) $f''(x) = \dfrac{10\ \ln(x) - 5}{x^3}$

$10\ \ln(x) - 5 \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(x) \geqslant \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \ln(x) \geqslant \dfrac{1}{2}\ \ln(e) = \ln\ e^{\frac{1}{2}} = \ln\ \sqrt{e}$

($\ln(a) \geqslant \ln(b)$ équivaut à $a \geqslant b$) donc $x \geqslant \sqrt{e}$

$f''(x) \geqslant 0$ si $x \in [\sqrt{e}\ ;5]$ ($\sqrt{e} \approx 1{,}65$)

Donc la fonction f' est croissante sur l'intervalle $[2\ ;5]$

Réponse c

4) $f''(x) = \dfrac{10\ \ln(x) - 5}{x^3}$

A seul point d'inflexion:

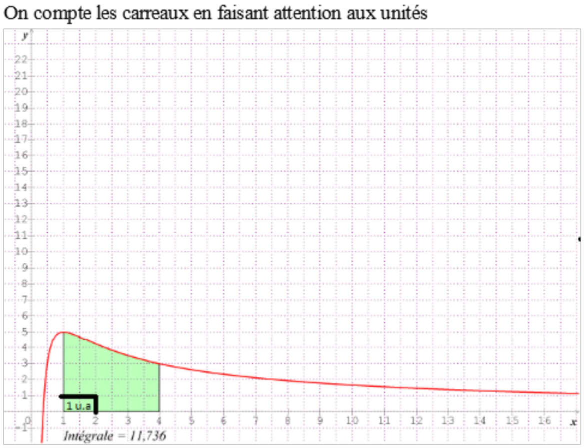
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 10\ \ln(x) - 5 = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$

$l\,n(x) = \dfrac{1}{2}\ \ln(e) = \ln\ e^{\frac{1}{2}} = \ln\ \sqrt{e}$ donc $x = \sqrt{e}$ (réponse exacte)

réponse c

5) $\mathbf{A} = \int_1^4 \mathbf{f}(x)\ dx$

On compte les carreaux en faisant attention aux unités



On compte 20 carreaux donc $10 \leqslant \mathbf{A} \leqslant 15$

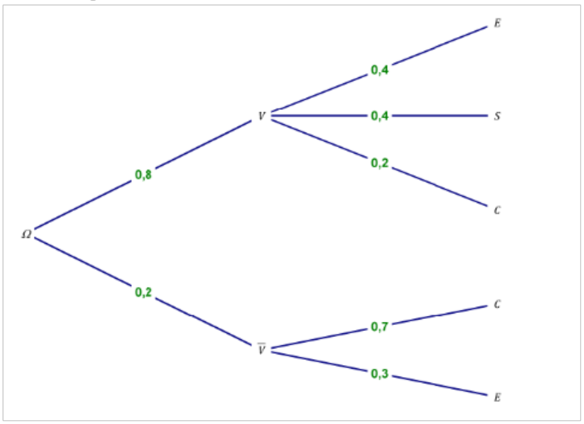
Réponse b

Exercice 2:

Partie A:

1)a) On a: $\mathbf{P(V) = 0{,}8}$ et $\mathbf{P_V(S) = 0{,}4}$

1)b) Arbre pondéré:



2)a) On calcule: $\mathbf{P(V \cap S) = P(V) \times P_V(S) = 0{,}8 \times 0{,}4 = 0{,}32}$

2)b) Réglement par carte (code secret, mode sans contact)

$\mathbf{P\left(E^-\right) = 1 - P(E)}$

Avec $\mathbf{P(E) = P(V \cap E) + P\left(V^- \cap E\right) = P(V) \times P_V(E) + P\left(V^-\right) \times P_{V^-}(E)}$

$\mathbf{P(E) = 0{,}8 \times 0{,}4 + 0{,}2 \times 0{,}3 = 0{,}38}$

D'où $\mathbf{P\left(E^-\right) = 1 - P(E) = 1 - 0{,}38 = 0{,}62}$

Partie B:

1) X suit une loi normale, $\boldsymbol{\mu = 27{,}5}$ et $\boldsymbol{\sigma = 3}$

A la calculatrice, on a: $\mathbf{P\left(X \leqslant 30\right) \approx 0{,}80}$ à $\mathbf{10^{-2}}$ près

2) A la calculatrice, on a: $\mathbf{P\left(24{,}5 \leqslant X \leqslant 30{,}5\right) \approx 0{,}68}$ à $\mathbf{10^{-2}}$ près

Partie C:

$\boldsymbol{n = 200}$ et $\boldsymbol{f_{observée} = \frac{175}{200} = \frac{7}{8}}$

Conditions: $\boldsymbol{n = 200 \geqslant 30}$; $\boldsymbol{nf = 175 > 5}$ et $\boldsymbol{n(1-f) = 25 > 5}$

Les conditions sont réunies.

Un intervalle de confiance au niveau de confiance de 0,95 de la proportion p est:

$$\mathbf{I}_n = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} \; ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = \left[\frac{7}{8} - \frac{1}{\sqrt{200}} \; ; \frac{7}{8} + \frac{1}{\sqrt{200}} \right]$$

$\mathbf{I}_n \approx [0{,}80 \; ; 0{,}95]$

La proportion des clients satisfaits se situe donc, au niveau de confiance 95% entre 80% et 95%.

Exercice 3:

1) $\boldsymbol{u_{n+1} = 0{,}8\, u_n + 18}$

$\boldsymbol{u_1 = 0{,}8\, u_0 + 18 = 0{,}8 \times 65 + 18 = 70}$ et $\boldsymbol{u_2 = 0{,}8\, u_1 + 18 = 0{,}8 \times 70 + 18 = 74}$

2)a) $\boldsymbol{v_n = u_n - 90}$

$$\boldsymbol{v_{n+1} = u_{n+1} - 90 = 0{,}8\, u_n + 18 - 90 = 0{,}8\, u_n - 72 = 0{,}8 \left(u_n - \frac{72}{0{,}8}\right) = 0{,}8\left(u_n - 90\right)}$$

$\boldsymbol{v_{n+1} = 0{,}8\, v_n}$

La suite $\left(v_n\right)$ est géométrique de raison $\boldsymbol{q = 0{,}8}$ et de premier termev $\boldsymbol{v_0 = u_0 - 90 = 65 - 90 = -25}$

2)b) Expression de $\boldsymbol{v_n}$ en fonction de n:

$\boldsymbol{v_n = v_0 \times q^n = -25 \times 0{,}8^n}$

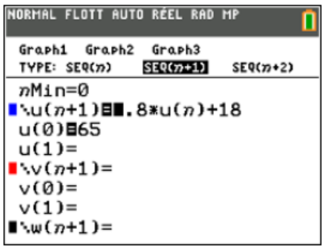
Comme $\boldsymbol{v_n = u_n - 90}$, on obtient $\boldsymbol{u_n = v_n + 90}$

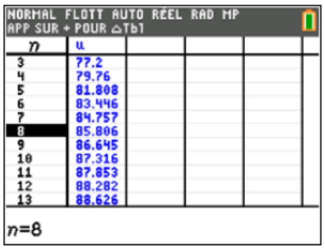
Soit $\boldsymbol{u_n = 90 - 25 \times 0{,}8^n}$

3)a) Algorithme:

Algorithme:
$u \longleftarrow 65$ $n \longleftarrow 0$ TantQue $u < 85$ $n \longleftarrow n+1$ $u \longleftarrow 0{,}8 \times u + 18$ Fin TantQue

3)b) A la fin de l'algorithme on trouve $\boldsymbol{n = 8}$





3)c) On veut déterminer le plus petit entier naturel n tel que:

$$u_n \geqslant 8 \iff 90-25\times 0{,}8^n \geqslant 8 \iff -25\times 0{,}8^n \geqslant -5 \iff 25\times 0{,}8^n \leqslant 5 \iff 0{,}8^n \leqslant \frac{5}{25}=\frac{1}{5}$$

La fonction "ln" est croissante sur $]0\ ;+\infty[$

$$\ln\ 0{,}8^n \leqslant \ln\left(\frac{1}{5}\right) \iff n\times \ln\ 0{,}8 \leqslant \ln\left(\frac{1}{5}\right) \iff n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}{\ln\ 0{,}8} \text{ car } 0{,}8<1 \text{ donc } \ln\ 0{,}8<0$$

Donc $n=8$ car $\dfrac{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}{\ln\ 0{,}8} \approx 7{,}2$

On retrouve bien le résultat précédent.

4)a) Au mois dejuillet, 65 particuliers ont souscrit cet abonnement donc $u_0=65$

D'un mois sur l'autre, 20% des abonnements sont résiliés donc 80% des abonnements sont confirmés

A ce nombre on rajoute 18 particuliers supplémentaires

u_n le nombre d'abonnés le mois n

u_{n+1} le nombre d'abonnés le mois suivant

Donc $u_{n+1}=0{,}8\ u_n+18$

On retrouve la suite précèdente.

4)b) Chaque abonné dépense 52 euros par mois

u_n représente le nombre d'abonnés donc la recette est: $R=52\times u_n$

$$R=52\left(90-25\times 0{,}8^n\right)=4680-1300\times 0{,}8^n=4420 \iff 1300\times 0{,}8^n=468064420=260$$

$0{,}8^n=\dfrac{260}{1300}=\dfrac{1}{5}$ et donc $n=8$ (question 3)c))

Dans 8 mois la recette dépassera la somme de 4420 euros durant l'année 2018.

4)c) $u_n=90-25\times 0{,}8^n$ comme $0{,}8<1$ on a: $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}8^n=0$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=90$

Le nombre d'abonnés va tendre vers 90, ce qui correspondrait à une recette de 4680 euros $\left(=90\times 52\right)$

Exercice 4:

Partie A:

1) La fonction f est dérivable sur $[0\ ;4]$

$$f'(x)=3{,}6\ e^{-0{,}6x}+(3{,}6\ x+2{,}4)\times\left(-0{,}6\ e^{-0{,}6x}\right)=3{,}6\ e^{-0{,}6x}-2{,}16\ x\,e^{-0{,}6x}-1{,}44\ e^{-0{,}6x}=2{,}16\ e^{-0{,}6x}-2{,}16\ x\,e^{-0{,}6x}$$

$$f'(x)=(2{,}16-2{,}16\ x)\ e^{-0{,}6x}$$

2)a) $f'(x)=2{,}16\ (1-x)\ e^{-0{,}6x}$

Le signe de la dérivée dépend du signe de $(1-x)$:

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$1-x$	$+$ 0 $-$

2)b) Tableau de variations:

x	0	1	4
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$f(0)=1$ ↗	$f(1)\approx 1{,}89$	↘ $f(4)\approx 0{,}12$

3) $F(x)=(-6\,x-14)\ e^{-0{,}6x}-1{,}4\ x$ est une primitive de f sur $[0\ ;4]$

$$\int_0^4 f(x)\ dx=[F(x)]_0^4=F(4)-F(0)=(-6\times 4-14)\ e^{-0{,}6\times 4}-1{,}4\times 4+14\ e^0$$

$$\int_0^4 f(x)\ dx=-38\ e^{-2{,}4}+8{,}4$$

$$\int_0^4 f(x)\ dx\approx 4{,}95 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

Partie B:

1) $g(x)=4\,x^2-4\,x+1$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} g(x)\ dx=[G(x)]_0^{\frac{1}{2}}=G\left(\frac{1}{2}\right)-G(0) \text{ avec } G(x)=\frac{4}{3}\ x^3-2\,x^2+x \text{ et } \begin{cases} G(0)=0 \\ G\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \mathbf{g}(x)\ dx = \mathbf{G}\left(\frac{1}{2}\right) - \mathbf{G}(0) = \frac{1}{6}$$

2) Aire délimitée par $\mathbf{C}_g$, $\mathbf{C}_f$, axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=4$

$$\mathbf{A}_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\mathbf{f}(x) - \mathbf{g}(x)\right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^{4} \mathbf{f}(x)\ dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \mathbf{f}(x)\ dx - \int_0^{\frac{1}{2}} g(x)\ dx + \int_{\frac{1}{2}}^{4} \mathbf{f}(x)\ dx$$

$$\mathbf{A}_1 = \left[\int_0^{\frac{1}{2}} \mathbf{f}(x)\ dx + \int_{\frac{1}{2}}^{4} \mathbf{f}(x)\ dx\right] - \int_0^{\frac{1}{2}} g(x)\ dx = \int_0^{4} \mathbf{f}(x)\ dx - \int_0^{\frac{1}{2}} g(x)\ dx$$

$$\mathbf{A}_1 = -38\, e^{-2,4} + 8,4 - \frac{1}{6} = \frac{247}{30} - 38\, e^{-2,4}$$

D'où $\mathbf{A}_{totale} = 2 \times \mathbf{A}_1 = 2 \times \left(\frac{247}{30} - 38\, e^{-2,4}\right) = 2 \times \frac{247}{30} - 2 \times 38\, e^{-2,4} = \frac{247}{15} - 76\, e^{-2,4}$

$\mathbf{A}_{totale} = 9,57\ u \cdot a$ (à 10^{-2} près)